Loi binomiale de paramètres n = 400 et p = 10/36

k	k/n	P(X=k)	Cumul
0	0	2,93994E-57	2,93994E-57
1	0,0025	4,52299E-55	4,55239E-55
2	0,005	3,47052E-53	3,51605E-53
3	0,0075	1,77086E-51	1,80602E-51
4	0,01	6,75991E-50	6,94051E-50
5	0,0125	2,05917E-48	2,12858E-48
6	0,015	5,21393E-47	5,42679E-47
7	0,0175	1,12873E-45	1,183E-45
8	0,02	2,13265E-44	2,25095E-44
9	0,0225	3,57264E-43	3,79774E-43
10	0,025	5,3727E-42	5,75248E-42
11	0,0275	7,32641E-41	7,90166E-41
12	0,03	9,13453E-40	9,9247E-40
45	0,1125	4,92391E-16	7,29233E-16
46	0,115	1,46153E-15	2,19076E-15
47	0,1175	4,23389E-15	6,42465E-15
48	0,12	1,19757E-14	1,84003E-14
49	0,1225	3,30882E-14	5,14885E-14
50	0,125	8,93381E-14	1,40827E-13
51	0,1275	2,35809E-13	3,76636E-13
52	0,13	6,08709E-13	9,85345E-13
53	0,1325	1,53723E-12	2,52258E-12
54	0,135	3,79929E-12	6,32187E-12
55	0,1375	9,19268E-12	1,55145E-11
56	0,14	2,17821E-11	3,72967E-11
57	0,1425	5,05604E-11	8,7857E-11
58	0,145	1,15001E-10	2,02858E-10
59	0,1475	2,56392E-10	4,5925E-10
92	0,23	0,004446691	0,017511008
93	0,2325	0,005664106	0,023175115
94	0,235	0,007114896	0,030290011
95	0,2375	0,008814406	0,039104417
96	0,24	0,010770809	0,049875226
97	0,2425	0,012983052	0,062858278
98	0,245	0,01543903	0,078297308
99	0,2475	0,018114169	0,096411477
100	0,25	0,020970634	0,117382111
101	0,2525	0,023957312	0,141339424
102	0,255	0,027010695	0,168350119
103	0,2575	0,030056711	0,19840683
104	0,26	0,033013473	0,231420304
105	0,2625	0,035794828	0,267215132
106	0,265	0,038314493	0,305529625

CONSIGNES

On rappelle que le jeu consiste à lancer deux dés cubiques équilibrés dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. On gagne si la somme des valeurs données par les deux dés vaut au-moins 9.

1) On répète le jeu **20 fois** de suite. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de gains obtenus lors de ces 20 fois. Calculer la probabilité de gagner **de 3 à 7 fois**, lors des 20 parties.

2) Déterminer à l'aide de la table binomiale en annexe la probabilité qu'au cours de **400 parties**, les fréquences du succès soient comprises dans l'intervalle **[0,25 ; 0,3].** Arrondir à 0,001 près.

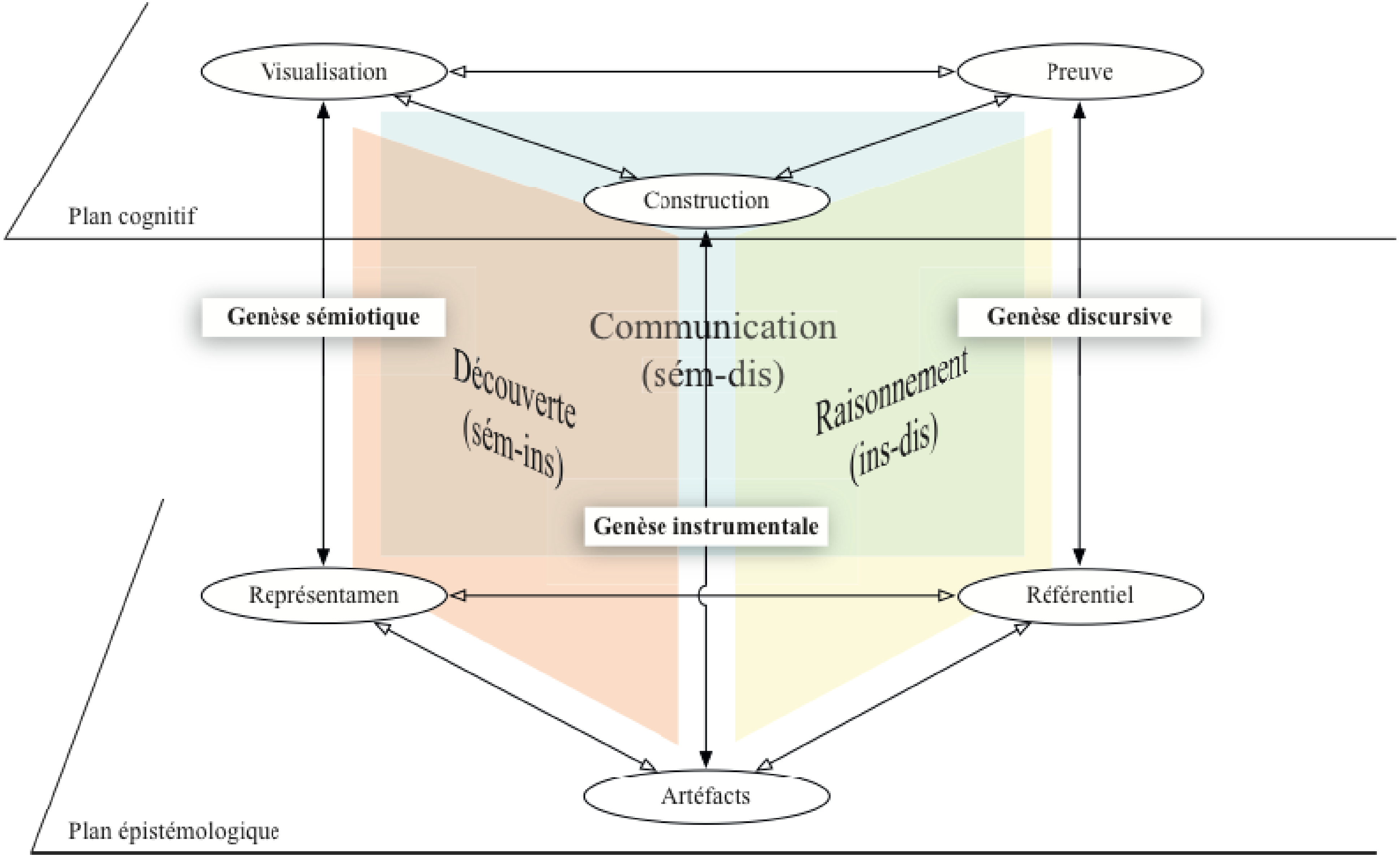
3) Déterminer un intervalle [a ;b], auquel la fréquence a au-moins une probabilité de 0,95 d'appartenir.

Analyse a priori et exploitation d’un cadre didactique

- Identifier les étapes discursives majeures de l’activité qui mènent à valider le travail mathématique (raisonnement, preuve, démonstration,…).

- Identifier les artefacts, et les genèses instrumentales éventuelles.

- Identifier les registres sémiotiques en jeu (signes et symboles, phases de traitements, de conversions,…).



L'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak & Richard, 2014).

k	P(X=k)	CUMUL
0	0,00149	
1	0,01147	
2	0,0419	
3	0,09669	0,09669
4	0,15806	0,25475
5	0,19453	0,44929
6	0,18705	0,63634
7	0,14389	0,78022
8	0,08993	
9	0,04612	
10	0,01951	
11	0,00682	
12	0,00197	
13	0,00047	
14	9E-05	
15	1,4E-05	
16	1,7E-06	
17	1,5E-07	
18	9,6E-09	
19	3,9E-10	
20	7,5E-12	

Approximation numérique par le tableur

Expression exacte par une approche combinatoire

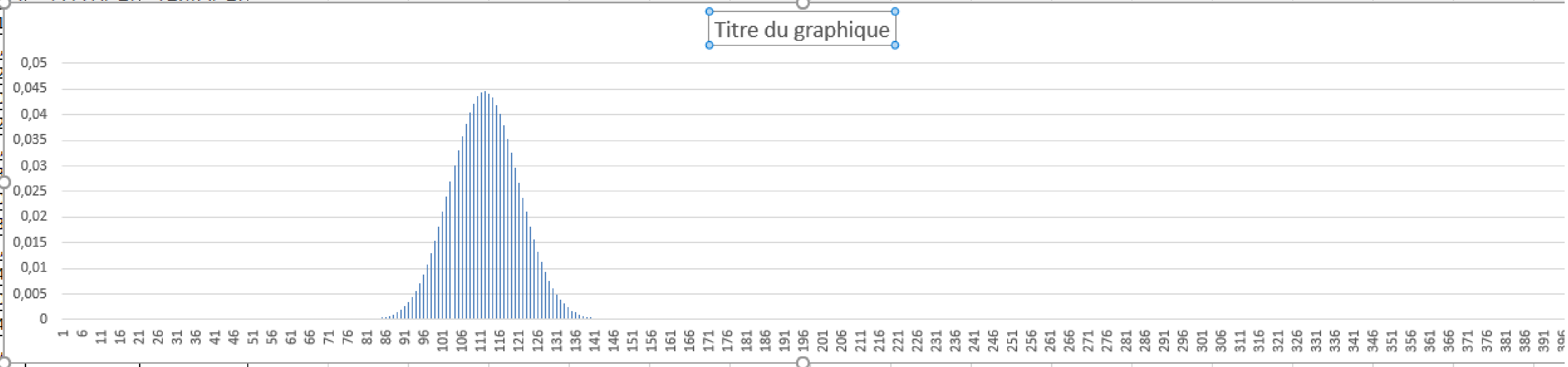
$$P(3 \leq X \leq 7) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$$

$$= \binom{20}{3}\left(\frac{10}{36}\right)^3\left(\frac{26}{36}\right)^{17} + \binom{20}{4}\left(\frac{10}{36}\right)^4\left(\frac{26}{36}\right)^{16}$$

$$+ \binom{20}{5}\left(\frac{10}{36}\right)^5\left(\frac{26}{36}\right)^{15} + \binom{20}{6}\left(\frac{10}{36}\right)^6\left(\frac{26}{36}\right)^{14}$$

$$+ \binom{20}{7}\left(\frac{10}{36}\right)^7\left(\frac{26}{36}\right)^{13}$$

	A	B	C	D
1	k	k/n	P(X=k)	Cumul
2	0	0	2,93994E-57	2,93994E-57
3	1	0,0025	4,52299E-55	4,55239E-55
4	2	0,005	3,47052E-53	3,51605E-53
5	3	0,0075	1,77086E-51	1,80602E-51
6	4	0,01	6,75991E-50	6,94051E-50
7	5	0,0125	2,05917E-48	2,12858E-48
8	6	0,015	5,21393E-47	5,42679E-47
9	7	0,01		
10	8	0,		
11	9	0,02		
12	10	0,0		
13	11	0,02		
14	12	0,		
15	13	0,03		
16	14	0,0		
17	15	0,03		
18	16	0,		
19	17	0,04		
20	18	0,0		
21	19	0,04		
22	20	0,		
23	21	0,0525	2,86294E-31	3,3387E-31
24	22	0,055	1,89695E-30	2,23082E-30
25	23	0,0575	1,19907E-29	1,42215E-29



96	0,24	0,010770809	0,04987523
97	0,2425	0,012983052	0,06285828
98	0,245	0,01543903	0,07829731
99	0,2475	0,018114169	0,09641148
100	0,25	0,020970634	0,11738211
101	0,2525	0,023957312	0,14133942
102	0,255	0,027010695	0,16835012
103	0,2575	0,030056711	0,19840683
104	0,26	0,033013473	0,2314203
105	0,2625	0,035794828	0,26721513
106	0,265	0,038314493	0,30552963
107	0,2675	0,040490514	0,34602014
108	0,27	0,042249717	0,38826986
109	0,2725	0,043531819	0,43180168
110	0,275	0,044292865	0,47609454
111	0,2775	0,044507729	0,52060227
112	0,28	0,044171476	0,56477375
113	0,2825	0,043299473	0,60807322
114	0,285	0,041926278	0,6499995
115	0,2875	0,040103396	0,69010289
116	0,29	0,037896114	0,727999
117	0,2925	0,035379672	0,76337868
118	0,295	0,032635095	0,79601377
119	0,2975	0,02974498	0,82575875
120	0,3	0,026789549	0,8525483
121	0,3025	0,02384321	0,87639151
122	0,305	0,020971802	0,89736331

0,09641148

Par incompatibilité des évènements correspondant aux différentes valeurs possibles de nombres de succès :

P(100≤X≤120) = P(0,25 ≤ f ≤ 0,3) ≈ 0,8525483 – 0,09641148
≈ 0,75613682
≈ 75,6 %

0,8525483

Un intervalle auquel la fréquence une probabilité d'au moins 0,95 d'appartenir.

On peut chercher l'intervalle [a ; b] tel que :

- a est le plus petit nombre entier tel que $P(X \leq a) \geq 0{,}025$
- b est le plus petit nombre entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$

On obtient alors $1 – P(X > b) \geq 0{,}975$

C'est-à-dire $P(X > b) \leq 0{,}025$ de plus $P(X < a) < 0{,}025$

Donc $P(X>a \text{ ou } X>b) < 0{,}05$ C'est-à-dire $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$

Donc $P(a/n \leq f \leq b/n) \geq 0{,}95$

En appliquant à notre exemple :

$\mathbf{P(94 \leq X \leq 129) = P(0{,}235 \leq f \leq 0{,}3225)}$

$= P(X\leq129) – P(X\leq93) \approx 0{,}97875565 – 0{,}02317511$

$\approx 0{,}95558054$

$\approx$ **95,6 %**

Théorème de Bernoulli

On considère une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $\mathrm{P}\left(\left|F_n - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

La démonstration originale de Jacques Bernoulli dans *Ars conjectandi* (1713) pour le cas particulier de la fréquence d'une binomiale, fait appel avec beaucoup d'ingéniosité à la formule du binôme et aux propriétés des nombres. Conscient de la portée de son théorème le savant s'y exprimait ainsi :

« Mais pour que cela ne soit pas compris autrement qu'il ne convient, il faut bien noter ce qui suit ; je voudrais que le rapport entre les nombres de cas, que nous entreprenons de déterminer expérimentalement, ne fût pas pris de façon nette et sans partage (…), mais je voudrais que le rapport fût admis avec une certaine latitude, c'est à dire compris entre une paire de limites, pouvant être prises aussi rapprochées qu'on voudra. »

On considère une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On pose $F_n = \frac{X_n}{n}$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $P\left(\left|F_n - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

<u>Appliquons cette formule à notre exemple :</u>

Pour un intervalle de fluctuation centré en p d'amplitude 2ε contenant la fréquence avec une probabilité d'au-moins 0,95 :

$p(1 – p)/(n\varepsilon^2) = 0,05$ c 'est-à-dire : $(10/36)(1-10/36) / (400\ \varepsilon^2) = 0,05$

On obtient $\varepsilon^2 = 260/25920$

Donc $\varepsilon = 0,100154$

On en déduit un intervalle de fluctuation : **J = [p-ε ; p+ε]**

≈ [0,177 ; 0,378]

L'amplitude de cet intervalle (environ 0,2) est presque le double de l'amplitude de l'intervalle directement rendu par la loi binomiale.

Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev :

Pour une variable aléatoire X de loi de probabilité finie d'espérance μ et d'écart-type σ : $\mathbf{P(\mu-\lambda\sigma \leq X \leq \mu+\lambda\sigma) \geq 1 - 1/\lambda^2}$

- Une démonstration peut être donnée pour cette propriété. C'est-à-dire un raisonnement de type déductif venant compléter le raisonnement inductif qui met en place de manière expérimentale la fluctuation d'échantillonnage.
- Cette démonstration met en jeu des cadres différents : intervalles et inégalités, notion de probabilité et de variable aléatoire avec espérance et écart-type.
- De nombreux savoirs élémentaires sont exploités et réinvestis : règles sur les inégalités, sens de variation du carré,…
- Cette preuve constitue la première étape permettant d'établir la loi des grands nombres lorsqu'on applique l'inégalité à une loi binomiale.

Une activité de statistiques descriptives est très proche de l'expression obtenue avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.

Il s'agit de la propriété suivante qui peut être établie en 2nde :

Pour une série statistique $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ finie (non pondérée) de moyenne m et d'écart-type s :

- [m-2s ; m+2s] contient au-moins 3/4 des valeurs de la série.
- [m-3s ; m+3s] contient au-moins 8/9 des valeurs de la série.
- [m-4s ; m+4s] contient au-moins 15/16 des valeurs de la série.

….

- [m-λs ; m+λs] contient au-moins $1 - 1/\lambda^2$ des valeurs de la série.

Cette activité peut être menée dès la 2nde comme un travail d'approfondissement en statistiques descriptives portant sur les intervalles et les inégalités, qui fait appel à des raisonnements ensemblistes.

Exemple d'énoncé pour la classe de 2nde :

Une activité de démonstration liée à l'écart-type en statistiques descriptives.

1) On considère une série finie de n valeurs (x_i), pour $1 \leq i \leq n$, de moyenne μ et d'écart-type σ .

   On note k le nombre de valeurs de cette série qui ne s'éloignent pas de plus de 2σ par rapport à leur moyenne μ. Prouver que $k/n \geq 0,75$. C'est à dire qu'au moins 75% des valeurs de la série sont dans [μ-2σ ; μ+2σ].

2) Démontrer une propriété analogue concernant l'intervalle [μ-3σ ; μ+3σ].

Ce découpage en deux questions analogues en jouant sur une variable de l'énoncé permet une approche pédagogique en deux temps :

- la question 1) peut être traitée comme une recherche ou présentée en classe dialoguée par le professeur.
- La question 2) est un réinvestissement de ce qui a été compris par les élèves.

Analyse pour la question 1) :

- Les valeurs de l'intervalle [μ-2σ ; μ+2σ] sont situés à une distance de moins de 2σ du nombre μ.
- ➢ L'écart entre les valeurs de la série qui sont dans cet intervalle et la moyenne μ est inférieur à 2σ .
- ➢ Le carré d'écart entre ces valeurs et μ est inférieur à $(2\sigma)^2$
- ➢ La somme de ces carrés d'écart est inférieure à la somme de tous les carrés d'écarts par rapport à μ.
- La moyenne de tous les carrés d'écarts par rapport à μ vaut la variance σ^2
- On peut aussi procéder de même en considérant plutôt les valeurs de la série qui ne sont pas dans [μ-2σ ; μ+2σ] ce qui permet d'appliquer une transitivité sur les inégalités.

Résolution du 1) : $\xi = \left\{ x_i \quad tq \quad \left| x_i - \mu \right| > 2\sigma \right\} \qquad avec \quad card(\xi) = n - k$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mu\right)^2 \quad \geq \quad \sum_{x_i \in \xi} \left(x_i - \mu\right)^2 \qquad \geq \qquad (n-k)2^2\sigma^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \quad \left|x_i - x\right|^2 \quad \geq \quad \frac{4}{n}(n-k)\sigma^2$$

$$\sigma^2 \quad \geq \quad \frac{4}{n}(n-k)\sigma^2$$

$$-3 \quad \geq \quad -4\frac{k}{n}$$

$$\frac{k}{n} \geq \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Ce qui nous donne au-moins 75% des valeurs de la série dans l’intervalle [μ-2σ ; μ+2σ] .

CLASSE DE $1^{\text{ère}}$:

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en univers fini

1) Démontrer que pour une variable aléatoire X de loi de probabilité finie :

$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \geq 3/4$$

2) Démontrer le cas général de l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev pour une variable aléatoire X de loi de probabilité finie :

$$P(\mu-\lambda\sigma \leq X \leq \mu+\lambda\sigma) \geq 1 - 1/\lambda^2 \qquad \text{(pour tout entier } \lambda>1\text{)}$$

C'est-à-dire : $P(-a \leq X-\mu \leq a) \geq 1 - \sigma^2/a^2$ (avec $a>\sigma$)

Résolution du 1) : On reprend la démarche correspondante pour les statistiques en adaptant au contexte probabiliste, c'est-à-dire en exprimant la formule de la variance à partir des fréquences théoriques (v. a. finie prenant k différentes valeurs).

$$\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)(x_i - \mu)^2 \geq \sum_{x_i \notin I} P(X = x_i)(x_i - \mu)^2 \geq \sum_{x_i \notin I} P(X = x_i)\, 2^2 {\sigma_X}^2$$

$${\sigma_X}^2 \geq 4{\sigma_X}^2 \sum_{x_i \notin I} P(X = x_i) = 4{\sigma_X}^2 P(X \notin I) = 4{\sigma_X}^2 (1 - P(X \in I))$$

$$1 \quad \geq \quad 4\,\big(1 - P(|X - \mu| \leq 2\sigma_X)\big)$$

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma_X) \quad \geq \quad 1 - \frac{1}{4}$$

<u>Résolution du 2)</u> : On reprend la même démarche en exprimant la formule de la variance à partir des fréquences théoriques (v. a. finie prenant k différentes valeurs) et en considérant un intervalle I = [μ-λσ ; μ+λσ] au lieu de [μ-2σ ; μ+2σ] :

$$\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)\left(x_i - \mu\right)^2 \quad \geq \quad \sum_{x_i \notin I} P(X = x_i)\left(x_i - \mu\right)^2 \quad \geq \quad \sum_{x_i \notin I} P(X = x_i)\lambda^2\sigma^2$$

$$\sigma_X{}^2 \quad \geq \quad \lambda^2\sigma^2 \sum_{x_i \notin I} P(X = x_i) \quad = \quad \lambda^2\sigma_X{}^2 P(X \notin I) \quad = \quad \lambda^2\sigma_X{}^2 (1 - P(X \in I))$$

$$1 \quad \geq \quad \lambda^2 \left(1 - P\left(\left|X - \mu\right| \leq \lambda\mu\right)\right)$$

$$P\left(\left|X - \mu\right| \leq \lambda\mu\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

Preuve de la loi faible des grands nombres

On applique l'inégalité de B-T à une variable aléatoire $X_n \sim B(n,p)$:

$P(|X_n - \mu| > \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$ avec $\mu = np$ et $\sigma^2 = np(1-p)$

C'est-à-dire : $P\left(|X_n - np| > \lambda\sqrt{np(1-p)}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$

En considérant la variable aléatoire fréquence $F_n = \frac{1}{n}X_n$:

Soit $\varepsilon > 0$ posons $\lambda = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}$

$P\left(|F_n - p| > \lambda\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$ $\varepsilon = \lambda\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

On obtient : $P(|F_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

Avec par conséquent : $\lim_{n\to+\infty} P(|F_n - p| > \varepsilon) = 0$

Exploitation du langage Python

File Explorer

- Ce PC
  - Bureau
  - Documents
  - Images
  - Musique
  - Objets 3D
  - Téléchargements
  - Vidéos
  - OS (C:)
  - DATA (D:)

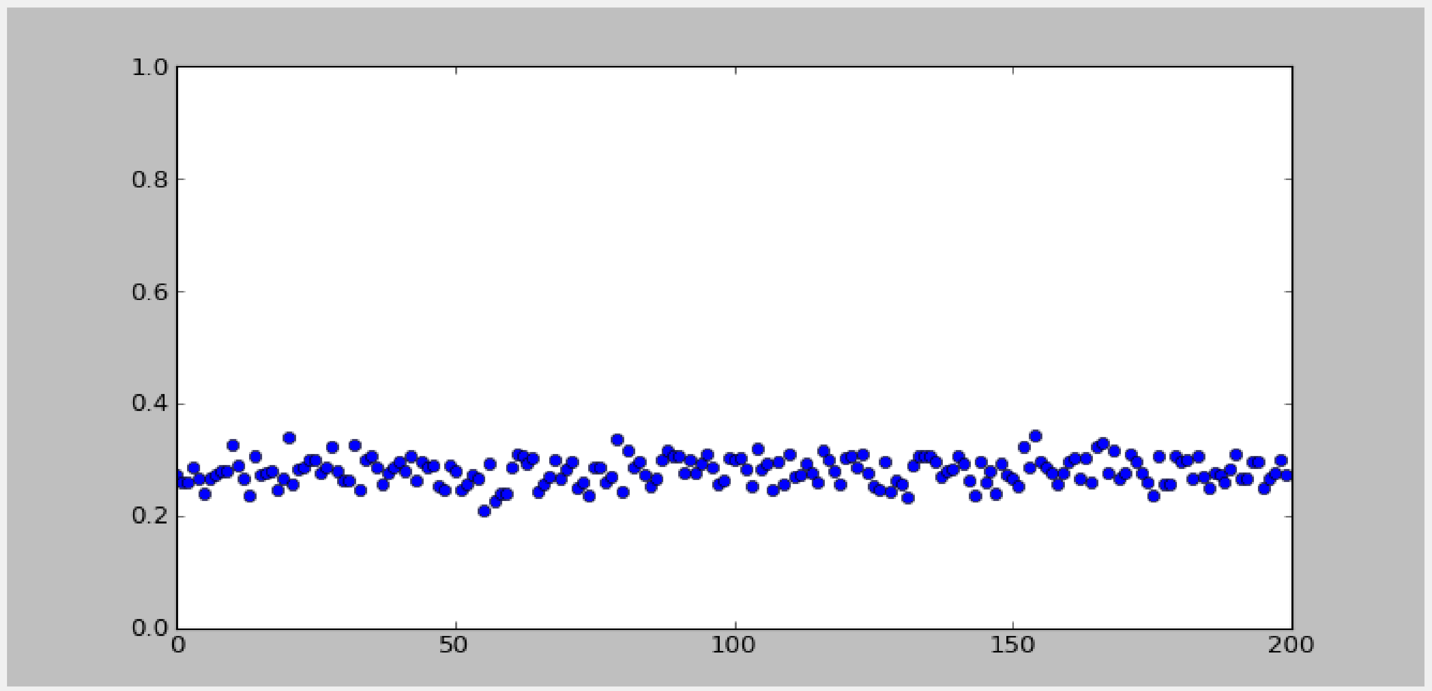
File ... | Proj... | Cod...

```python
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
x=[]
y=[]
for k in range(200):
    succes=0
    for i in range(400):
        somme=rd.randint(1,6)+rd.randint(1,6)
        if somme>=9:
            succes=succes+1
    f=succes/400
    x.append(k)
    y.append(f)

z=sorted(y)
print(z)

plt.axis([0,200,0,1])
plt.plot(x,y,"o")
plt.show()
```

Probabilité.py



Python Interpreter

```
>>>
[0.21, 0.2275, 0.2325, 0.235, 0.2375, 0.2375, 0.2375, 0.24, 0.24, 0.24, 0.24, 0.2425, 0.2425, 0.2425, 0.245, 0.245, 0.2475, 0.2475, 0.2475, 0.2475, 0.25, 0.25, 0.25, 0.2525, 0.2525, 0.2525, 0
.2525, 0.2525, 0.255, 0.255, 0.255, 0.255, 0.255, 0.2575, 0.2575, 0.2575, 0.2575, 0.2575, 0.2575, 0.26, 0.26, 0.26, 0.26, 0.26, 0.26, 0.26, 0.26, 0.26, 0.2625, 0.2625, 0.2625, 0.2625, 0.2625,
 0.2625, 0.265, 0.265, 0.265, 0.265, 0.265, 0.265, 0.265, 0.265, 0.2675, 0.2675, 0.2675, 0.2675, 0.2675, 0.2675, 0.27, 0.27, 0.27, 0.27, 0.27, 0.2725, 0.2725, 0.2725, 0.2725, 0.2725, 0.2725,
 0.2725, 0.2725, 0.2725, 0.275, 0.275, 0.275, 0.275, 0.275, 0.275, 0.2775, 0.2775, 0.2775, 0.2775, 0.2775, 0.2775, 0.2775, 0.2775, 0.28, 0.28, 0.28, 0.28, 0.28, 0.28, 0.28, 0.28, 0.28, 0.2825
, 0.2825, 0.2825, 0.2825, 0.2825, 0.2825, 0.285, 0.285, 0.285, 0.2875, 0.2875, 0.2875, 0.2875, 0.2875, 0.2875, 0.2875, 0.2875, 0.2875, 0.2875, 0.29, 0.29, 0.29, 0.29, 0.2925, 0.2925,
 0.2925, 0.2925, 0.2925, 0.2925, 0.2925, 0.295, 0.295, 0.295, 0.295, 0.295, 0.295, 0.295, 0.2975, 0.2975, 0.2975, 0.2975, 0.2975, 0.2975, 0.2975, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3,
 0.3, 0.3025, 0.3025, 0.3025, 0.3025, 0.3025, 0.3025, 0.305, 0.305, 0.305, 0.305, 0.305, 0.305, 0.3075, 0.3075, 0.3075, 0.3075, 0.3075, 0.3075, 0.3075, 0.3075, 0.31, 0.31, 0.31, 0.31, 0.31, 0
.31, 0.315, 0.315, 0.3175, 0.3175, 0.32, 0.3225, 0.3225, 0.3225, 0.3275, 0.3275, 0.33, 0.335, 0.34, 0.3425]
```