Pouvoir générique d'une preuve

Véronique Battie

CORFEM - juin 2021

Université de Lyon, Université Claude Bernard Lyon1
S2HEP (EA 4148) - Département de Mathématiques

Au menu

1. Introduction : Mise à jour de questions épistémologiques et didactiques suite à la lecture d'extraits de ressources Eduscol (2019)
2. Analyse épistémologique de plusieurs preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ qui amène à introduire l'idée de *pouvoir générique d'une preuve* en écho aux travaux du philosophe M.Steiner.
3. Exemple d'activité multi-preuves à la transition Lycée-Université
4. Conclusion : retour sur les ressources Eduscol (2019)

éduSCOL
Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

VOIE GÉNÉRALE
ET TECHNOLOGIQUE

2DE | 1RE | TLE

Mathématiques

ENSEIGNEMENT COMMUN

RAISONNEMENT ET DÉMONSTRATION

VOIE GÉNÉRALE | 1RE | *Mathématiques*

Quelques pistes pour différencier

Des démonstrations différentes

Pour prendre en compte la diversité des publics et des fonctionnements intellectuels, il est profitable lorsque c'est possible d'envisager plusieurs démonstrations d'un même résultat. Cela peut être mis en pratique avec des raisonnements différents, en choisissant des registres variés (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel), en recourant à des outils logiciels diversifiés. L'élève peut alors se voir proposer de choisir celle des démonstrations qu'il notera dans son cahier de cours.

(Eduscol, 2019)

document de 23 pages dont 16 dédiées à des problèmes et différentes preuves associées

document de 29 pages dont 19 dédiées à des problèmes et différentes preuves associées

On ne retrouve pas cette invitation pour la Terminale.

Des démonstrations en plusieurs niveaux de détail

Il peut être intéressant également de donner les démonstrations en plusieurs niveaux de détail :

- niveau 1 : seulement le plan et les idées générales ;
- niveau 2 : démontrer chaque étape du plan, avec un partage des tâches différencié au sein de la classe, suivi d'une mise en commun ;
- niveau 3 : démonstration complète, en évitant une longueur excessive.

Là encore, l'élève, qui autoévalue sa propre aptitude de compréhension, peut choisir le niveau de détail pour la démonstration qu'il note dans son cahier de cours.

Commencer par traiter un exemple générique

Une autre piste consiste à démontrer un résultat sur un exemple générique. Il s'agit d'un exemple numérique ou d'un cas particulier dont le traitement approche une démonstration générale, en ce sens que les outils mobilisés et les modes de raisonnement sont assez facilement transférables au cas général. Le traitement d'un exemple générique n'a pas le statut d'une démonstration générale, mais il peut mobiliser les mêmes objectifs de formation. Dans certains cas, on peut s'en tenir à cet exemple en précisant qu'on admet le cas général.

(Eduscol, 2019)

Écho à la conférence de N.Balacheff lors du colloque CORFEM 2019 (Balacheff, 2019)

Des questions épistémologiques (au sens de Glaeser, 1999) et didactiques émergent :

- Comment mener une analyse comparative de preuves d'un même résultat ? quels critères adopter ?
- Quel sens épistémologique donner à "plan", "étape du plan", "idées générales" (Eduscol, 2019) ?
- Dans la perspective d'aller vers le "général" (Eduscol 2019) : "Not all proofs are equally amenable to a genuine generic version. Can we characterize the proofs (or parts thereof) that are so amenable ?" (Leron, Zaslavsky, 2013)

- Pourquoi et comment mettre en scène en classe/TD une activité multipreuves ?

Des questions épistémologiques (au sens de Glaeser, 1999) et didactiques émergent :

- Comment mener une analyse comparative de preuves d'un même résultat ? quels critères adopter ?
- Quel sens épistémologique donner à "plan", "étape du plan", "idées générales" (Eduscol, 2019) ?
- Dans la perspective d'aller vers le "général" (Eduscol 2019) : "Not all proofs are equally amenable to a genuine generic version. Can we characterize the proofs (or parts thereof) that are so amenable ?" (Leron, Zaslavsky, 2013)

- Pourquoi et comment mettre en scène en classe/TD une activité multipreuves ?

L'objectif principal de cette présentation est d'essayer d'apporter des éléments de réponse dans le cas de l'arithmétique.

Deux dimensions épistémologiques au sein du raisonnement (Battie, 2009) :

- La **dimension organisatrice** s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée ; exemples en arithmétique.
- La **dimension opératoire** est relative à tout ce qui relève des manipulations de calcul (au sens le plus large) opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice) ; exemples en arithmétique.

Deux dimensions épistémologiques au sein du raisonnement (Battie, 2009) :

- La **dimension organisatrice** s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée ; exemples en arithmétique.
- La **dimension opératoire** est relative à tout ce qui relève des manipulations de calcul (au sens le plus large) opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice) ; exemples en arithmétique.

Deux dimensions épistémologiques complémentaires et en interaction dans le processus de preuve (Battie, 2007) (Gardes, 2013)

Deux dimensions épistémologiques au sein du raisonnement (Battie, 2009) :

- La **dimension organisatrice** s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée ; exemples en arithmétique.
- La **dimension opératoire** est relative à tout ce qui relève des manipulations de calcul (au sens le plus large) opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice) ; exemples en arithmétique.

Deux dimensions épistémologiques complémentaires et en interaction dans le processus de preuve (Battie, 2007) (Gardes, 2013)

Proof Preuve Prueba

International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof

ISSN 1292-8763

(Hanna, Knipping, 2020)(Stylianides, Harel (Eds) 2018)

$\hookrightarrow$ Travaux de Leron (1983) sur la structuration des preuves

"Sans exemples, il est difficile d'évaluer la pertinence des analyses théoriques."

"Sans exemples, il est difficile d'évaluer la pertinence des analyses théoriques."
(Gérard Vergnaud)
https://gerardvergnaud.wordpress.com

Sélection de quatre preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$:

1. Analyser en termes de dimensions organisatrice et opératoire chacune des preuves dans une perspective comparative
2. Relire ces preuves dans une perspective de "généralisation"
3. Introduire l'idée de "pouvoir générique" d'une preuve
4. Faire parler l'écho avec les travaux du philosophe Mark Steiner (1978)

preuve 1

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$; on suppose de plus que la fraction est irréductible.

Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a $2b^2 = a^2$ d'où et $2b^2 = a^2$ donc a^2 est pair ; par contraposée on montre que a l'est aussi : si a n'est pas pair alors il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$ et donc a^2 est impair car égal à $2 \times 2(k^2 + k) + 1$. Il existe donc un entier a' non nul tel que $a = 2a'$; d'où $2b^2 = 4(a')^2$ ou encore $b^2 = 2(a')^2$. Comme précédemment, on en conclut que b est pair.

Ceci contredit le caractère irréductible de la fraction.

En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

"Consider the Pythagorean proof that the square root of 2 is not rational : if $a^2 = 2b^2$, with $\frac{a}{b}$ reduced to lowest terms, then a^2 and thus a itself have to be even ; thus a^2 must be a multiple of 4, and b^2 - and thus b - mutilples of 2. Since therefore $a^2 = 2b^2$ implies that both a and b must be even, contradicting our (allowable) stipulation that $\frac{a}{b}$ be reduced to lowest terms, it can be true, q.e.d. The key point here is the proposition that if a^2 is even so is a. This can be verified by squaring an arbitrary odd number $2q + 1$ and showing that the result must be odd" (Steiner, 1978)

preuve 2

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a $2b^2 = a^2$ donc a^2 est pair ; par contraposée on montre que a l'est aussi : si a n'est pas pair alors il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$ et donc a^2 est impair car égal à $2 \times 2(k^2 + k) + 1$. Il existe donc un entier a' non nul tel que $a = 2a'$; d'où $2b^2 = 4(a')^2$ ou encore $b^2 = 2(a')^2$. Comme précédemment, on en conclut que b est pair.
Ainsi, à partir des entiers a et b on obtient des entiers naturels a' et b' tels que $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$, $a' < a$ et $b' < b$. On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est en contradiction avec "toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie".
En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

preuve 3

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$; on suppose que la fraction est irréductible
Avec l'égalité précédente on $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et, $\frac{a}{b}$ étant irréductible, $\frac{a^2}{b^2}$ l'est aussi (on admet que si a et b n'ont pas de facteur commun alors a^2 et b^2 n'en ont pas non plus). L'égalité $2 = \frac{a^2}{b^2}$ impose $b^2 = 1$ donc $a^2 = 2$, ce qui est en contradiction avec "2 n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$".
En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

preuve 4

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ d'où $2b^2 = a^2$.
On appelle α l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de a et β celui de b. D'après l'égalité précédente on a $1 + 2\beta = 2\alpha$, ce qui est en contraction avec "un nombre impair ne peut être à un nombre pair".
En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

preuve 4

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ d'où $2b^2 = a^2$.
On appelle α l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de a et β celui de b. D'après l'égalité précédente on a $1 + 2\beta = 2\alpha$, ce qui est en contraction avec "un nombre impair ne peut être à un nombre pair".
En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

"By using the Fundamental Theorem of Arithmetic - that each number has a unique prime power expansion - we can argue for the irrationality of the square root of two swiftly and decisively. For in the prime power expansion of a^2 the prime 2 will necessarily appear with an even exponent (double exponent it has in the expansion f a), while in $2b^2$ its exponent must needs be odd. So a^2 never equals $2b^2$, q.e.d." (Steiner, 1978)

Résultat général en jeu : Soit n un entier naturel. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{n}$ soit rationnel est que n soit un carré d'entier. L'enjeu est de prouver que la condition est nécessaire.

Problématique épistémologique : quelle(s) preuve(s) parmi les quatre proposées donne(nt) l'accès le plus aisé à une preuve du caractère nécessaire de la condition mentionnée ?

Retour sur l'étape opératoire commune aux preuves 1 et 2

Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a d'où et $2b^2 = a^2$ donc a^2 est pair ; par contraposée on montre que a l'est aussi : si a n'est pas pair alors il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$ et donc a^2 est impair car égal à $2 \times 2(k^2 + k) + 1$. Il existe donc un entier a' non nul tel que $a = 2a'$; d'où $2b^2 = 4(a')^2$ ou encore $b^2 = 2(a')^2$. Comme précédemment, on en conclut que b est pair.

Retour sur la preuve 3

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$; on suppose que la fraction est irréductible. Avec l'égalité précédente on $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et, $\frac{a}{b}$ étant irréductible, $\frac{a^2}{b^2}$ l'est aussi (on admet que si a et b n'ont pas de facteur commun alors a^2 et b^2 n'en ont pas non plus). L'égalité $2 = \frac{a^2}{b^2}$ impose $b^2 = 1$ donc $a^2 = 2$, ce qui est en contradiction avec "2 n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$". En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Retour sur la preuve 3

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$; on suppose que la fraction est irréductible. Avec l'égalité précédente on $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et, $\frac{a}{b}$ étant irréductible, $\frac{a^2}{b^2}$ l'est aussi (on admet que si a et b n'ont pas de facteur commun alors a^2 et b^2 n'en ont pas non plus). L'égalité $2 = \frac{a^2}{b^2}$ impose $b^2 = 1$ donc $a^2 = 2$, ce qui est en contradiction avec "2 n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$". En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$; on suppose de plus que la fraction est irréductible. Avec l'égalité précédente on $n = \frac{a^2}{b^2}$ et, $\frac{a}{b}$ étant irréductible, $\frac{a^2}{b^2}$ l'est aussi (on admet que si a et b n'ont pas de facteur commun alors a^2 et b^2 n'en ont pas non plus). L'égalité $n = \frac{a^2}{b^2}$ impose $b^2 = 1$ donc $a^2 = n$.

Retour sur la preuve 4

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ d'où $2b^2 = a^2$.
On appelle α l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de a et β celui de b. D'après l'égalité précédente on a $1 + 2\beta = 2\alpha$, ce qui est en contraction avec "un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair". En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Retour sur la preuve 4

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ d'où $2b^2 = a^2$.
On appelle α l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de a et β celui de b. D'après l'égalité précédente on a $1 + 2\beta = 2\alpha$, ce qui est en contraction avec "un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair". En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ d'où $nb^2 = a^2$.
Supposons par l'absurde que n ne soit pas un carré : il existe alors p premier tel que $v_p(n)$ impair. Et d'après l'égalité précédente on a $v_p(n) + 2v_p(b) = 2v_p(a)$, ce qui est en contraction avec "un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair". En conclusion, $\sqrt{n}$ est un carré.

"pouvoir générique"

=

Choix fait au niveau de la dimension opératoire de la preuve 4

=

Forme de représentation choisie pour les entiers

=

Écriture unique des entiers via leur décomposition en produit de nombres premiers

"pouvoir générique"

=

Choix fait au niveau de la dimension opératoire de la preuve 4

=

Forme de représentation choisie pour les entiers

=

Écriture unique des entiers via leur décomposition en produit de nombres premiers

Hiérarchie (ordre croissant) : preuves 1 et 2 ex-æquo, preuve 3, preuve 4

"pouvoir générique"

=

Choix fait au niveau de la dimension opératoire de la preuve 4

=

Forme de représentation choisie pour les entiers

=

Écriture unique des entiers via leur décomposition en produit de nombres premiers

Hiérarchie (ordre croissant) : preuves 1 et 2 ex-æquo, preuve 3, preuve 4

Mode d'emploi :

1. procédé de "dé-encapsulation" = on prouve les résultats admis dans la dimension opératoire de chaque preuve
2. on évalue le niveau de complexité en termes de dimensions organisatrice et opératoire de la preuve résultat de ce procédé
3. moins la preuve obtenue par dé-encapsulation est complexe, plus cette preuve est susceptible d'avoir un "pouvoir générique" élevé.

Faire parler l'écho avec les travaux de Steiner (1978)

"Consider the Pythagorean proof [preuve 1] that the square root of 2 is not rational [. . .] The key point here is the proposition that if a^2 is even so is a. [. . .] Indeed for each prime p, one can separately verify that if p divides a^2 it must divide a also, though the proofs become more and more complex [. . .]. But by using the Fundamental Theorem of Arithmetic [preuve 4] [. . .] we can argue for the irrationality of the square root of two swiftly and decisively.[. . .] Generally, the same proof shows that a^2 can never equals nb^2, unless n is a perfect square (so that all exponents in its prime power expansion will be even). "

Faire parler l'écho avec les travaux de Steiner (1978)

"Our proof that $a^2 = 2b^2$, which uses the prime power expansions of a and b (and 2) [preuve 4], conforms to our description, since the prime power expansion of a number is a characterizing property. It's easy to see what happens, moreover, when 2 becomes 4 or any other square ; the prime power expansion of 4, unlike that of 2, contains 2 raised to an even power, allowing $a^2 = 2b^2$. In the same way we get a general theorem : the square root of n is either an integer or irrational. Generalizing further, almost the same reasoning gives us the same for the pth root of n. "

"My proposal is that an explanatory proof makes reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the theorem, such that from the proof it is evident that the result depends on the property."

Retour sur notre mode d'emploi :

1. procédé de "dé-encapsulation" = on prouve les résultats admis dans la dimension opératoire de chaque preuve
2. on évalue le niveau de complexité en termes de dimensions organisatrice et opératoire de la preuve résultat de ce procédé
3. moins la preuve obtenue par dé-encapsulation est complexe, plus cette preuve est susceptible d'avoir un "pouvoir générique" élevé.

Nous proposons d'exprimer l'idée de **pouvoir générique d'une preuve** en termes de (distance) accessibilité à ce que Steiner (1978) défini comme la "characterizing property", une fois le processus de dé-encapsulation effectué.

Néanmoins...

Nous inscrivons l'introduction (de nature épistémologique) de l'idée de pouvoir générique d'une preuve dans une **perpective didactique centrée sur la preuve et le processus de preuve** et non une perspective philosophique d'explication mathématique.

"[...] a key role of proving in the classroom is to teach proof itself : its use in justification, its strategies, its techniques, and this various forms. In this role, the most important goal of proof is to generate an understanding of the need to prove, of the process of proving, and of the role of deductive reasoning and logical inference. The focus of this chapter [Reflections on Proof as Explanation], however, is on the potential complementary role of proofs in fostering a greater understanding of other mathematical concepts and propositions." (Hanna, 2018)

Le modèle d'explication mathématique de M.Steiner est l'un des plus connus en philosophie et c'est D.Tall (1979) qui l'inscrit dans une perspective didactique, notamment en reprenant l'idée de "generalizable proof" sous l'appellation "generic proof".

Exemple d'activité multipreuves exploitant les preuves 1 à 4

Exemple d'activité multipreuves exploitant les preuves 1 à 4

Première séance : "On rappelle qu'un nombre est rationnel si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a entier et b entier naturel non nul."

1. Selon votre groupe, le nombre $\sqrt{2}$ est-il rationnel ou non rationnel ? Justifier votre réponse le plus rigoureusement possible.
2. Selon votre groupe, le nombre $\sqrt{3}$ est-il rationnel ou non rationnel ? Justifier votre réponse le plus rigoureusement possible.
3. A votre avis, pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est-il rationnel ? Tenter de démontrer votre conjecture.

Exemple d'activité multipreuves exploitant les preuves 1 à 4

Deuxième séance : **les preuves 1 à 4 sont fournies**.
1. De quelle preuve vos idées du ... sont-elles les plus proches ?
2. Choisir la preuve qui vous permet le plus facilement de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et écrivez la preuve associée.
4. On peut se demander pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est rationnel ; Complétez la phrase suivante : « $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est ....». Tenter de démontrer cette équivalence en vous inspirant de la preuve qui vous semble la plus facile à adapter.

Enjeux didactiques à la transition Lycée-Université centrés sur :

- le raisonnement et la preuve en mathématiques (via un travail de "dissection épistémologique" à travers l'analyse comparative de preuve)
- des contenus d'arithmétique

Enjeux didactiques à la transition Lycée-Université centrés sur :

- le raisonnement et la preuve en mathématiques (via un travail de "dissection épistémologique" à travers l'analyse comparative de preuve)
- des contenus d'arithmétique

"[...]it its often possible to find the happy concurrence in which a proof enlightens both the process of proving and the broader mathematical context with which it deals." (Hanna, 2018)

Enjeux didactiques à la transition Lycée-Université centrés sur :

- le raisonnement et la preuve en mathématiques (via un travail de "dissection épistémologique" à travers l'analyse comparative de preuve)
- des contenus d'arithmétique

"[...]it its often possible to find the happy concurrence in which a proof enlightens both the process of proving and the broader mathematical context with which it deals." (Hanna, 2018)

Limites didactiques :

- non accès aux propriétés permettant de manipuler les réels (Durand-Guerrier, 2019)
- limite des preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en termes d'explication mathématique

Au cœur de la conception de ce type d'activité il y a la sélection par l'enseignant(e) des preuves

Cela nécessite de pouvoir mener une analyse comparative entre les preuves, mettre à jour le "plan", les "étapes du plan", les "idées générales" (Eduscol, 2019)

Une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire avec l'idée de pouvoir générique apparaît comme solution.

Éléments-clefs a posteriori (Battie, 2015) et pratique enseignante en L1

Élèves et étudiants vont de façon privilégiée vers les preuves 3 et 4.
Ce constat va dans le sens des travaux de D.Tall (1979)

Éléments-clefs a posteriori (Battie, 2015) et pratique enseignante en L1

Élèves et étudiants vont de façon privilégiée vers les preuves 3 et 4.
Ce constat va dans le sens des travaux de D.Tall (1979)

Enrichissement du milieu (Brousseau, 1990) et lecture active des preuves avec le risque d'une compréhension superficielle (rôle de l'enseignant)

"I believe that the accounts given here of my work with undergraduates offer grounds for considerable optimism regarding the possibility of students "seeing" the generality we intend them to see in arguments based on particular cases. At the same time, it warns us against naïve complacency : we cannot be sure what they will see, and they may see considerably less than we might hope." (Rowland, 2002)

En guise de conclusion : retour sur Eduscol (2019)

Le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel
[...]

Prérequis, motivation

- Les élèves démontrent que le carré d'un nombre impair est impair. Ils en déduisent que si un carré est pair, alors le nombre est pair, par l'absurde. Ce résultat est utile dans la démonstration 1.

En guise de conclusion : retour sur Eduscol (2019)

Le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

[...]

Prérequis, motivation

- Les élèves démontrent que le carré d'un nombre impair est impair. Ils en déduisent que si un carré est pair, alors le nombre est pair, par l'absurde. Ce résultat est utile dans la démonstration 1.

[...]

Différentes démonstrations possibles

Le professeur peut dans un premier temps exposer le principe du raisonnement par l'absurde : on pose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec $\frac{p}{q}$ fraction irréductible. On essaie d'aboutir à une contradiction. On remarque d'abord que l'hypothèse implique $p^2 = 2q^2$.

1. On raisonne avec la parité : l'égalité $p^2 = 2q^2$ implique que p^2 est pair, ce qui implique que p est pair (voir le premier prérequis) ; donc $p = 2p'$ avec p' entier ; on en tire $4p'^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2p'^2$, ce qui permet de déduire que q est pair lui aussi. Contradiction.

En guise de conclusion : retour sur Eduscol (2019)

[...]

Pistes de différenciation

- Proposer une des trois preuves, au choix, en donnant l'idée. Les élèves consignent dans leur cahier celle qui leur convient le mieux.
- Tous les élèves peuvent s'approprier le raisonnement par l'absurde et se contenter du plan d'une des démonstrations (niveau 1).
- Le niveau 1 (plan) La structure de la démonstration peut se formaliser ainsi, en dégageant le principe du raisonnement par l'absurde :
  - supposer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel ;
  - déduire une relation $p^2 = 2q^2$, où p et q sont des entiers non nuls premiers entre eux ;
  - déduire des propriétés de p et q par l'une des trois méthodes ;
  - aboutir à une contradiction.

Approfondissements possibles

- Étudier si $\sqrt{3}$ est rationnel ou non, ou $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc.
  Remarque : lorsque n n'est pas un carré, la première démonstration permet de démontrer que $\sqrt{n}$ n'est pas rationnel, avec la décomposition en facteurs premiers et la divisibilité.

Références

Balacheff, N. (2019) L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. XXVIe *Colloque CORFEM*, Jun 2019, Strasbourg, France. hal-02981131

Battie, V. (2009). Proving in number theory at the transition from the secondary level to the tertiary level: between organizing and operative dimensions, in Lin F., Hsieh F.-J., Hanna G., De Villiers M. (Eds.) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 71-76). The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan.

Battie, V. (2007). Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse des raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 27(1), 9-44.

Battie, V. (2015). Arithmétique et raisonnement mathématique en classe de terminale C&E au Gabon. *Revue africaine de didactique des sciences et des mathématiques*, 12.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu: Dévolution. Recherches en didactique des Mathématiques, 9(3), 309-336.

Durand-Guerrier, V. (2019) Travailler avec les preuves pour favoriser l'appropriation des concepts mathématiques. XXVIe *Colloque CORFEM*, Jun 2019, Strasbourg, France.

Gardes, M.-L. (2013). *Etude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de l'Université Lyon 1.

Glaeser, G. (1999). *Introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*. La Pensée Sauvage.

Hanna, G. & Knipping, C. (2020). Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview. *Journal of Educational Research in Mathematics,* Special Issue, 001-013. Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. *The American Mathematical Monthly*, 90(3), 174-184.

Hanna, G. (2018). Reflections on proof as explanation. In (Stylianides, A. J. & Harel, G. (Eds.) 2018).

Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. *The American Mathematical Monthly*, 90(3), 174-184.

Leron, U. & Zaslavsky, O. (2013). Generic proving : Reflections on scope and method. *For the learning of Mathematics*, 15(3), 277-289.

Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. In Campbell, S. R., & Zazkis, R. (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp.157-183). Westport: Ablex Publishing.

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies*, 34, 135–151.

Stylianides, A. J. & Harel, G. (Eds.) (2018). *Advances in mathematics education research on proof and proving. An international perspective.* Springer.

Tall, D.O. (1979). Cognitive aspects of proof, with special reference to the irrationality of $\sqrt{2}$. In *Proceedings of PME 3* (pp.203-205). Warwick, UK: University of Warwick.