Expérimenter, questionner et prouver en mathématiques

Le cas du problème de Wang

Mickael Da Ronch & Michèle Gandit

Maths à Modeler, Institut Fourier, Université Grenoble Alpes

Le 10 juin 2021, XXVIIe Colloque CORFEM

Déroulement de l'atelier

I. Mise en bouche

Le problème de Wang (*the Domino Problem*)

Le problème de Wang (*the Domino Problem*)

Définition

Une tuile de Wang est un carré unitaire partagé en 4 secteurs triangulaires colorés

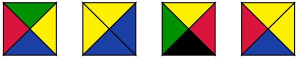


***Fig. 1** – Exemple d'une collection de 4 tuiles de 5 couleurs.*

Le problème de Wang (*the Domino Problem*)

Définition

Une tuile de Wang est un carré unitaire partagé en 4 secteurs triangulaires colorés

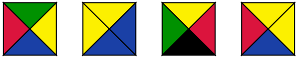


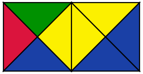
***Fig. 1** – Exemple d'une collection de 4 tuiles de 5 couleurs.*

Le problème

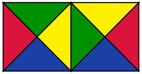
- **Donnée.** Un ensemble fini de tuiles de Wang.
- **Question.** Peut-on paver le plan par des tuiles de cet ensemble ?

La règle du jeu

1. Deux tuiles peuvent s'assembler si elles ont un côté commun de la même couleur.



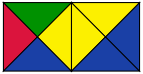
OUI



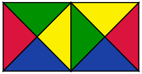
NON

La règle du jeu

1. Deux tuiles peuvent s'assembler si elles ont un côté commun de la même couleur.



OUI

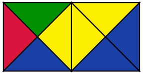


NON

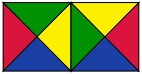
2. Les rotations et réflexions sont interdites.

La règle du jeu

1. Deux tuiles peuvent s'assembler si elles ont un côté commun de la même couleur.



OUI

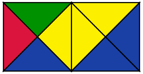


NON

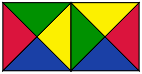
2. Les rotations et réflexions sont interdites. **Pourquoi ?**

La règle du jeu

1. Deux tuiles peuvent s'assembler si elles ont un côté commun de la même couleur.



OUI

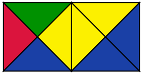


NON

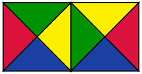
2. Les rotations et réflexions sont interdites. **Pourquoi ?**
3. Une tuile peut être répétée autant de fois que nécessaire.

La règle du jeu

1. Deux tuiles peuvent s'assembler si elles ont un côté commun de la même couleur.



OUI



NON

2. Les rotations et réflexions sont interdites. **Pourquoi ?**
3. Une tuile peut être répétée autant de fois que nécessaire. **La raison ?**

Quelques cas particuliers

Quelques cas particuliers

Quelques cas particuliers

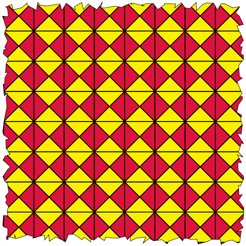


Fig. 2 – Extrait d'un pavage périodique du plan discret.

Quelques cas particuliers

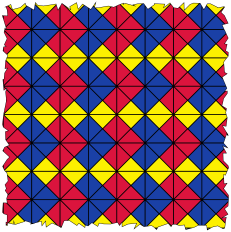


Fig. 3 – Extrait d'un pavage périodique du plan discret.

Quelques cas particuliers

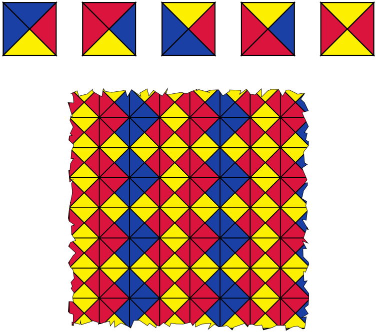


Fig. 4 – Extrait d'un pavage périodique du plan discret.

Quelques cas particuliers

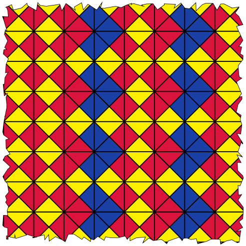
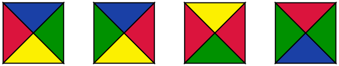
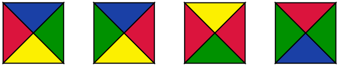


Fig. 5 – Extrait d'un pavage ***non*** *périodique du plan discret.*

Quelques cas particuliers

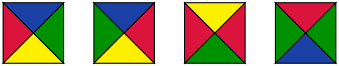


Quelques cas particuliers



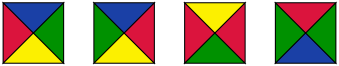
Le pavage du plan est impossible !

Quelques cas particuliers



Le pavage du plan est impossible ! **Pourquoi ?**

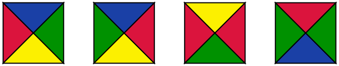
Quelques cas particuliers



Le pavage du plan est impossible ! **Pourquoi ?**

- En éliminant des tuiles

Quelques cas particuliers



Le pavage du plan est impossible ! **Pourquoi ?**

- En éliminant des tuiles
- En montrant qu'il existe au moins une taille de carré non pavable (lemme de König)

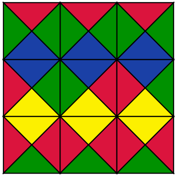


Fig. 6 – *Aucun carré de taille strictement sup. à 3 n'est pavable.*

Premiers constats

1. Soit le plan est pavable uniquement de façon périodique.

Premiers constats

1. Soit le plan est pavable uniquement de façon périodique.

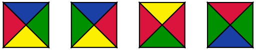
2. Soit le plan est pavable à la fois de façon périodique mais aussi non périodique.

Premiers constats

1. Soit le plan est pavable uniquement de façon périodique.

2. Soit le plan est pavable à la fois de façon périodique mais aussi non périodique.

3. Soit le plan n'est pas pavable car il existe au moins un motif carré d'une certaine taille qui n'est pas pavable avec ces tuiles.



Question assez naturelle…

Existence d'un jeu apériodique ?

Question assez naturelle...

Existence d'un jeu apériodique ?

Un peu d'histoire...

II. Épistémologie et histoire du problème de Wang

Épistémologie et histoire du problème

Fig. 7 – *Hao Wang (1921-1995)*

- Premier questionnement sur les problèmes de décision dû à Leibniz au XVIIe siècle

Épistémologie et histoire du problème

Fig. 7 *– Hao Wang (1921-1995)*

- Premier questionnement sur les problèmes de décision dû à Leibniz au XVIIe siècle
- Le Problème de la décision (*Entscheidungsproblem*) est formulé par Hilbert et Ackermann (1927)

Épistémologie et histoire du problème

Fig. 7 – *Hao Wang (1921-1995)*

- Premier questionnement sur les problèmes de décision dû à Leibniz au XVIIe siècle
- Le Problème de la décision (*Entscheidungsproblem*) est formulé par Hilbert et Ackermann (1927)
- Turing démontre l'indécidabilité de l'*Entscheidungsproblem* par réduction du Problème de l'arrêt (1937) quasiment au même moment que Church (1936)

Épistémologie et histoire du problème

Fig. 7 *– Hao Wang (1921-1995)*

- Premier questionnement sur les problèmes de décision dû à Leibniz au XVIIe siècle
- Le Problème de la décision (*Entscheidungsproblem*) est formulé par Hilbert et Ackermann (1927)
- Turing démontre l'indécidabilité de l'*Entscheidungsproblem* par réduction du Problème de l'arrêt (1937) quasiment au même moment que Church (1936)
- Wang énonce le *domino problem* dans son article de 1961 à partir d'un problème de satisfaisabilité de certaines classes de formules de la logique du premier ordre ($\forall\exists\forall$)

Épistémologie et histoire du problème

9.4 The $A_1E_1A_1$ Satisfiability case

4.1 *A Generalized Game of Dominoes*

The study of the decision problem of the present case has suggested a related abstract mathematical problem which can easily be stated in everyday language. The problem appears to be of interest even to those who are not concerned with questions in ... of the same size with edges colored, ... copies of each

Conjecture de Wang (1961, p. 177)

“A finite set of plates is solvable (as at least one solution) if and only if there existes a cyclic rectangle of the plates ; or, in other words, a finite set of plates is solvable if and only if it has a least periodic solution.”

4.1.2 *The fundamental conjecture:* A finite set of plates is solvable (has at least one solution) if and only if there exists a cyclic rectangle of the plates; or, in other words, a finite set of plates is solvable if and only if it has at least one periodic solution.

It is easy to prove the following:

Épistémologie et histoire du problème

Corollaire

Si tous les ensembles de tuiles de Wang qui pavent le plan, le pavent périodiquement, alors le problème est décidable.

- Existence d'un algorithme de décision.

Épistémologie et histoire du problème

Corollaire

Si tous les ensembles de tuiles de Wang qui pavent le plan, le pavent périodiquement, alors le problème est décidable.

- Existence d'un algorithme de décision.
- Évaluation de toutes les dispositions possibles des tuiles pour construire des carrés de 1 à n jusqu'à trouver un motif carré non pavable ou un motif carré périodique.

Épistémologie et histoire du problème

Corollaire

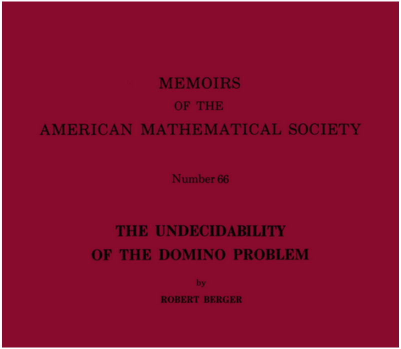
Si tous les ensembles de tuiles de Wang qui pavent le plan, le pavent périodiquement, alors le problème est décidable.

- Existence d'un algorithme de décision.
- Évaluation de toutes les dispositions possibles des tuiles pour construire des carrés de 1 à n jusqu'à trouver un motif carré non pavable ou un motif carré périodique.
- Nécessite dans le pire des cas $card\left(\mathcal{T}\right)^{n^2}$ $op.$ $\rightarrow$ impraticable !

Épistémologie et histoire du problème

Théorème (Berger, 1964 ; 1966)

Le problème général des dominos est indécidable.


MEMOIRS
OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

Number 66

THE UNDECIDABILITY
OF THE DOMINO PROBLEM

by

ROBERT BERGER

Épistémologie et histoire du problème

Existence d'un jeu de 20 426 tuiles !

Épistémologie et histoire du problème

Existence d'un jeu de 20 426 tuiles !

La course est alors lancée…

Épistémologie et histoire du problème

Berger (1964, 1966)	20426,104 tuiles
Läuchli (1966)	40 tuiles
Robinson (1967,1971)	52, 56 tuiles
Knuth (1968)	92 tuiles
Robinson (1971)	35 tuiles

Épistémologie et histoire du problème

Berger (1964, 1966)	20426,104 tuiles
Läuchli (1966)	40 tuiles
Robinson (1967,1971)	52, 56 tuiles
Knuth (1968)	92 tuiles
Robinson (1971)	35 tuiles
Penrose et Robinson (1976)	34 tuiles puis 32 tuiles
Robinson (1977)	24 tuiles 24 couleurs
Ammann (1978)	16 tuiles 6 couleurs

Épistémologie et histoire du problème

Berger (1964, 1966)	20426,104 tuiles
Läuchli (1966)	40 tuiles
Robinson (1967,1971)	52, 56 tuiles
Knuth (1968)	92 tuiles
Robinson (1971)	35 tuiles
Penrose et Robinson (1976)	34 tuiles puis 32 tuiles
Robinson (1977)	24 tuiles 24 couleurs
Ammann (1978)	16 tuiles 6 couleurs
Kari (1996)	14 tuiles et 6 couleurs
Culik (1996)	13 tuiles et 5 couleurs
Jeandel et Rao (2015)	11 tuiles et 4 couleurs

Tab. 1 – *Avancée dans la recherche de jeux apériodiques utilisant différents cadres et registres de représentation.*

Épistémologie et histoire du problème

COMPLEXITY OF SOLVABLE CASES OF THE DECISION PROBLEM FOR THE PREDICATE CALCULUS*

Harry R. Lewis

Aiken Computation Laboratory
Harvard University
Cambridge, Massachusetss 02138

Et sur des régions bornées comme les rectangles…

We analyze the computational complexity of determining whether F is satisfiable when F is a formula of the classical predicate calculus which obeys certain syntactic restrictions. For example, for the monadic predicate calculus and the Gödel or $\exists\ldots\exists\forall\forall\exists\ldots\exists$ prefix class we obtain lower and upper nondeterministic time bounds of the form $c^{n/\log n}$. The main tool in in these proofs is a finite version of Wang's domino problem, about which we present an interesting open question.

1. Introduction

Most work on the complexity of logical decision

Schönfinkel-Bernays or $\exists\ldots\exists\forall\ldots\forall$ prefix class: Lower bound of form NTIME$(c^{\sqrt{n}})$, upper bound of form NTIME(c^n)

Ackermann or $\exists\ldots\exists\forall\exists\ldots\exists$ prefix class: PSPACE-hard, and upper bound of form DTIME$(c^{n/\log n})$

The only previous work in this area was by Meyer and Rackoff[21] on the monadic class. They obtained the NTIME$(c^{n/\log n})$ lower bound for this class and an NTIME$(c^{n^2/\log^2 n})$ upper bound. For this class our results tighten the upper bound and show that the lower bound can be obtained for the subclass of monadic formulas with Gödel prefix.

The lower bound for the monadic, Gödel, and Schönfinkel-Bernays classes are established by encoding a finite version of Wang's domino problem[25,26]

Épistémologie et histoire du problème

COMPLEXITY OF SOLVABLE CASES OF THE DECISION PROBLEM FOR THE PREDICATE CALCULUS*

Harry R. Lewis

Aiken Computation Laboratory
Harvard University
Cambridge, Massachusetts 02138

Et sur des régions bornées comme les rectangles…

Abstract

We analyze the computational complexity of determining whether F is satisfiable when F is a formula of the classical predicate calculus which obeys certain syntactic restrictions. For example, for the monadic predicate calculus and the Gödel or $\exists\ldots\exists\forall\forall\exists\ldots\exists$ prefix class we obtain lower and upper nondeterministic time bounds of the form $c^{n/\log n}$. The main tool in these proofs is a finite version of Wang's domino problem, about which we present an interesting open question.

Schönfinkel-Bernays or $\exists\ldots\exists\forall\ldots\forall$ prefix class: Lower bound of form NTIME($c^{\sqrt{n}}$), upper bound of form NTIME(c^n)

Ackermann or $\exists\ldots\exists\forall\exists\ldots\exists$ prefix class: PSPACE-hard, and upper bound of form DTIME($c^{n/\log n}$)

The only previous work in this area was by Meyer and Rackoff[21] on the monadic class. They obtained the NTIME($c^{n/\log n}$) lower bound for this class and an NTIME($c^{n^2/\log^2 n}$) upper bound. For this class our results tighten the upper bound and show that the lower bound can be …

1. Introduction

Most work on the complexity of logical decision …

Un problème difficile au sens de la théorie de la complexité (voir p.ex., Lewis, 1978)

En résumé : un problème *a priori* difficile !

- Le problème de Wang est indécidable dans le plan.
- Le problème de Wang est en général difficile sur des rectangles même avec des contraintes monochromes sur les bords (voir annexes).

Le problème est donc difficile même pour des machines !

III. Quelles situations de recherche construire à partir de ce problème ?

Que faire ?

- Quels choix d'instances pour le problème ?
- Objectif : accessibilité à la preuve et aux raisonnements mathématiques : modèle des SiRC (Grenier et Payan, 2003 ; Gandit, Giroud et Godot, 2011)
- Faire vivre les différentes dialectiques d'action, de formulation et de validation (Brousseau, 1998)

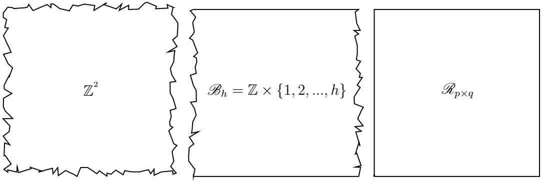


***Fig. 8** – Situations étudiées dans la thèse en cours de M. Da Ronch*

Petite piqûre de rappel sur le modèle des SiRC

Une caractérisation donnée par Grenier et Payan (2003) et complétée par Godot (2005).

Petite piqûre de rappel sur le modèle des SiRC

Une caractérisation donnée par Grenier et Payan (2003) et complétée par Godot (2005).

- Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche mathématique professionnelle.

Petite piqûre de rappel sur le modèle des SiRC

Une caractérisation donnée par Grenier et Payan (2003) et complétée par Godot (2005).

- Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche mathématique professionnelle.
- La question initiale est facile d'accès.

Petite piqûre de rappel sur le modèle des SiRC

Une caractérisation donnée par Grenier et Payan (2003) et complétée par Godot (2005).

- Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche mathématique professionnelle.
- La question initiale est facile d'accès.
- Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des pré-requis spécifiques.

Petite piqûre de rappel sur le modèle des SiRC

Une caractérisation donnée par Grenier et Payan (2003) et complétée par Godot (2005).

- Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche mathématique professionnelle.
- La question initiale est facile d'accès.
- Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des pré-requis spécifiques.
- Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles.

Petite piqûre de rappel sur le modèle des SiRC

Une caractérisation donnée par Grenier et Payan (2003) et complétée par Godot (2005).

- Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche mathématique professionnelle.
- La question initiale est facile d'accès.
- Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des pré-requis spécifiques.
- Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles.
- Une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question.

Petite piqûre de rappel sur le modèle des SiRC

Une caractérisation donnée par Grenier et Payan (2003) et complétée par Godot (2005).

- Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche mathématique professionnelle.
- La question initiale est facile d'accès.
- Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des pré-requis spécifiques.
- Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles.
- Une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question.
- Il existe au moins une variable de recherche dans la situation.

À vous de jouer !

Le problème du jour...

Le problème du jour

- On considère un jeu de tuiles de 4 couleurs.

Le problème du jour

- On considère un jeu de tuiles de 4 couleurs.
- Chaque tuile possède exactement ces 4 couleurs.

Le problème du jour

- On considère un jeu de tuiles de 4 couleurs.
- Chaque tuile possède exactement ces 4 couleurs.

- Le jeu est complet : $4! = 24$ tuiles distinctes.

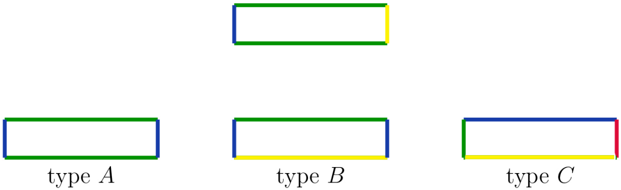
Question

Soient $p > 0$ et $q > 0$ des entiers. Est-il possible de paver un rectangle de taille $p \times q$ dont les bords sont monochromes avec des tuiles de $\mathcal{T}$?

Le problème du jour

Question

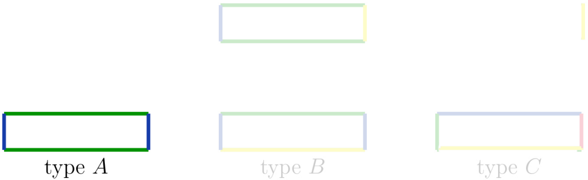
Soient $p > 0$ et $q > 0$ des entiers et notre jeu de tuiles $\mathcal{T}$. Est-il possible de paver un rectangle de taille $p \times q$ dont les bords sont monochromes avec des tuiles de $\mathcal{T}$?



Le problème du jour

Question

Soient $p > 0$ et $q > 0$ des entiers et notre jeu de tuiles $\mathcal{T}$. Est-il possible de paver un rectangle de taille $p \times q$ dont les bords sont monochromes avec des tuiles de $\mathcal{T}$?



À vous de jouer !

III. Éléments d'analyse mathématique

Éléments d'analyse mathématique pour le type A

Propriété — Rectangle $1 \times q$ de type A

Quel que soit l'entier $q > 1$, le rectangle de type A n'est jamais pavable.

Remarque. Une première condition nécessaire initiale est que $p, q > 1$

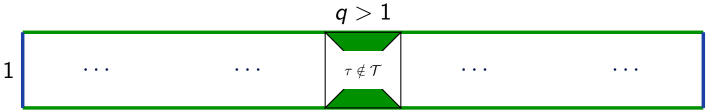


Fig. 9 – *Impossiblité de paver une rectangle de largeur 1.*

Éléments d'analyse mathématique pour le type A

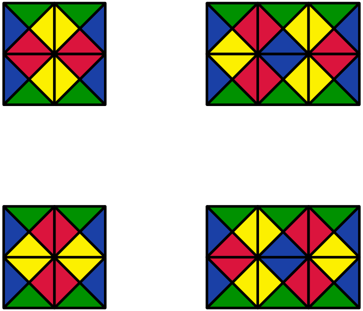


Fig. 10 – Existence et non unicité des motifs 2×2 *et* 2×3*.*

Éléments d'analyse mathématique pour le type A

Le cas où $p = 2$ et $q \in 2\mathbb{N}^*$

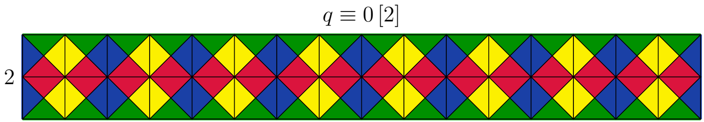


***Fig. 11** – Preuve de l'existence d'un pavage $2 \times q$ de type A lorsque $q \in 2\mathbb{N}^*$.*

Éléments d’analyse mathématique pour le type A

Le cas où $p = 2$ et $q \notin 2\mathbb{N}^*$

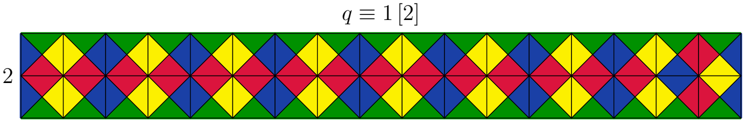


***Fig. 11** – Preuve de l’existence d’un pavage $2 \times q$ de type A lorsque $q \notin 2\mathbb{N}^*$.*

Éléments d’analyse mathématique pour le type A

Propriété — Rectangle $2 \times q$ de type A

Quel que soit l’entier $q > 1$, il existe toujours au moins un pavage valide pour le rectangle $2 \times q$ de type A.

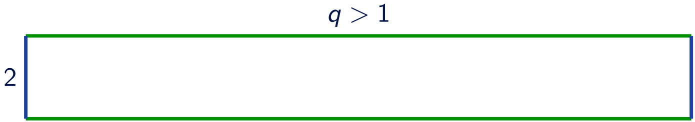


***Fig. 12** – Un rectangle $2 \times q$ de type A.*

Éléments d'analyse mathématique pour le type A

Propriété — Rectangle $2 \times q$ de type A

Quel que soit l'entier $q > 1$, il existe toujours au moins un pavage valide pour le rectangle $2 \times q$ de type A.

Remarque. Une autre preuve d'existence utilisant un résultat sur le type $|B|$ (i.e. bords EST-OUEST de la même couleur).

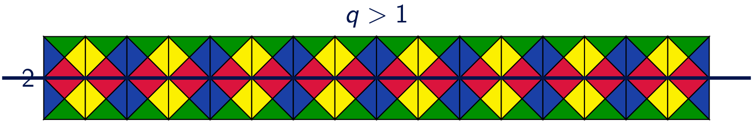


***Fig. 12** – Existence d'un pavage par réfléxion horizontale d'un $|B|$-motif lorsque $q \in 2\mathbb{N}^*$*

Éléments d'analyse mathématique pour le type A

Existence d'un pavage pour tous $p > 1$ et $q > 1$?

Éléments d'analyse mathématique pour le type A

Existence d'un pavage pour tous $p > 1$ et $q > 1$?

Non...

Éléments d'analyse mathématique pour le type A

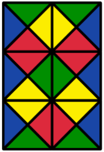


Fig. 13 – Existence d'un A-motif de taille 3×2 par rotation d'un quart de tour d'un A-motif de taille 2×3 avec permutation de couleurs.

Éléments d’analyse mathématique pour le type A

Condition suffisante : le cas où $p = 3$ et $q \in 2\mathbb{N}^*$

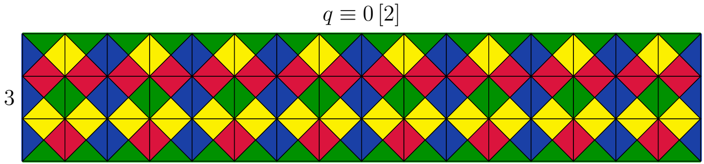


***Fig. 14** – Preuve de l’existence d’un pavage $3 \times q$ de type A lorsque $q \in 2\mathbb{N}^*$.*

Éléments d'analyse mathématique pour le type A

Condition nécessaire : le cas où $p = 3$ et $q \notin 2\mathbb{N}^*$

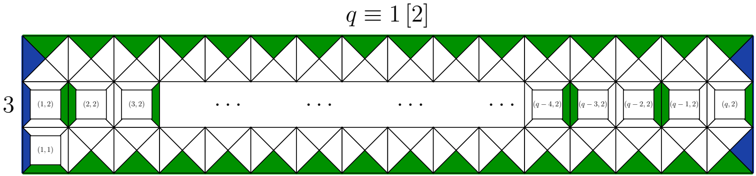


Fig. 14 – Preuve d'impossibilité utilisant un raisonnement par forcage (absurde) d'un pavage $3 \times q$ de type A lorsque $q \notin 2\mathbb{N}^*$.

Éléments d'analyse mathématique pour le type A

Propriété — Rectangle $3 \times q$ de type A

Soit $q > 1$ un entier, le rectangle $3 \times q$ de type A est pavable, si et seulement si, q est pair.

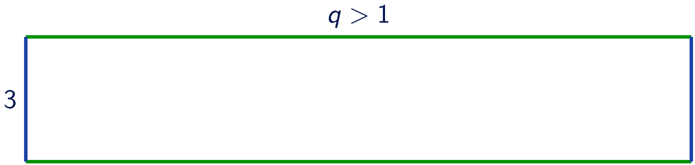


***Fig. 14 –** "$q > 1$ pair" est une CNS pour paver un rectangle $3 \times q$ de type A.*

Éléments d'analyse mathématique pour le type A

Conjecture — Rectangle $p \times q$ de type A

Soient $p > 1$ et $q > 1$ des entiers. Le rectangle $p \times q$ de type A est pavable, si et seulement si, le produit de p par q est pair.

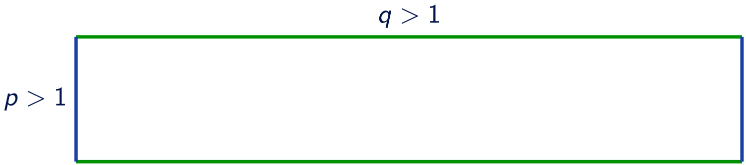


***Fig. 15** – Rectangle $p \times q$ de type A.*

Preuve de la CS : une disjonction de cas

Le cas où $p > 1$ et $q > 1$ sont **simultanément pairs**.

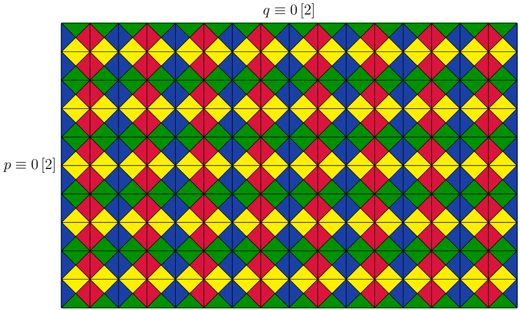


Fig. 16 – Preuve algorithmique de la CS par construction d'objets lorsque $p \in 2\mathbb{N}^*$ et $q \in 2\mathbb{N}^*$

Preuve de la CS : une disjonction de cas

Le cas où $p > 1$ est **pair** et $q > 1$ **impair**.

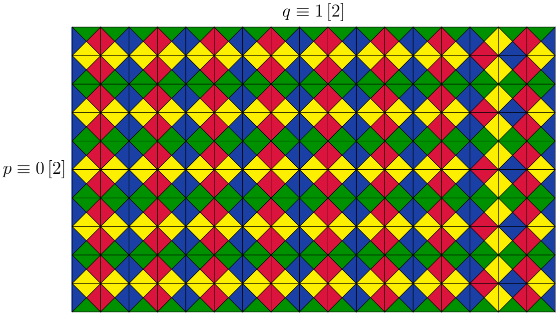


Fig. 17 – Preuve algorithmique de la CS par construction d'objets lorsque $p \in 2\mathbb{N}^*$ *et* $q \notin 2\mathbb{N}^*$

Preuve de la CS : une disjonction de cas

Existence d'un pavage lorsque p est impair et q est pair, pourquoi ?

Le cas où $p > 1$ est **pair** et $q > 1$ **impair**.

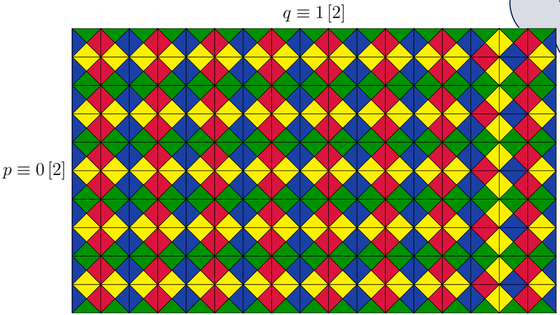


Fig. 18 – *Preuve algorithmique de la CS par construction d'objets lorsque $p \in 2\mathbb{N}^*$ et $q \notin 2\mathbb{N}^*$*

Preuve de la CS : une disjonction de cas

Le cas où $p > 1$ est **impair** et $q > 1$ **pair** : une preuve non constructive...

Attention à la base de l'induction !

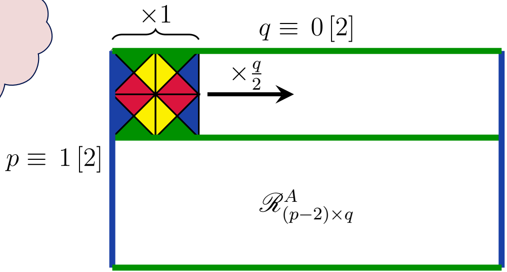


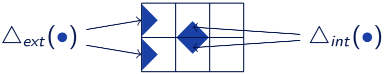
Fig. 19 **–** *Preuve de la CS par induction descendante utilisant le raisonnement par l'absurde à l'aide d'un contre-exemple minimal lorsque* $p \notin 2\mathbb{N}^*$ *et* $q \in 2\mathbb{N}^*$.

Preuve de la CN : partition et dénombrement

Lemme — Dénombrement du nombre de triangles

Quel que soit le type de rectangle, si ce dernier possède un pavage valide, alors le nombre de triangles d'une couleur apparaît exactement pq fois et on a, quelle que soit la couleur,

$$\text{Nbre de triangles} = \underbrace{\text{Nbre de triangles ext.}}_{\in\{0,p,q,2p,2q\}} + \underbrace{\text{Nbre de triangles int.}}_{\in 2\mathbb{N}}$$

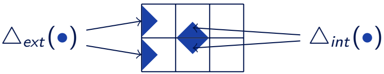


Preuve de la CN : partition et dénombrement

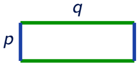
Lemme — Dénombrement du nombre de triangles

Quel que soit le type de rectangle, si ce dernier possède un pavage valide, alors le nombre de triangles d'une couleur apparaît exactement pq fois et on a, quelle que soit la couleur,

$$\text{Nbre de triangles} = \underbrace{\text{Nbre de triangles ext.}}_{\in\{0,p,q,2p,2q\}} + \underbrace{\text{Nbre de triangles int.}}_{\in 2\mathbb{N}}$$



Par exemple, pour le type A et la couleur bleue, on a : $Nbre\left[\triangle_{ext.}(\bullet)\right] = 2p$
$\Rightarrow$ l'entier pq est nécessairement pair... Absurde !



Une CNS pour le type A

Théorème — Rectangle $p \times q$ de type A

Soient $p > 1$ et $q > 1$ des entiers.
Le rectangle $p \times q$ de type A est pavable, si et seulement si, pq est pair.

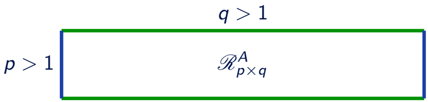


Fig. 20 *– Rectangle $p \times q$ de type A.*

Une CNS pour le type A

Théorème — Rectangle $p \times q$ de type A

Soient $p > 1$ et $q > 1$ des entiers.
Le rectangle $p \times q$ de type A est pavable, si et seulement si, pq est pair.

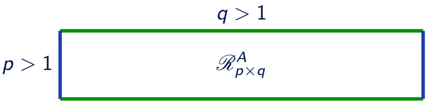


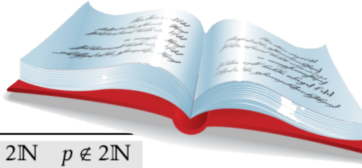
***Fig. 20** – Rectangle $p \times q$ de type A.*

Corollaire — Carré $n \times n$ de type A

Soit $n > 1$ un entier.
Le carré de taille $n \times n$ de type A est pavable, si et seulement si, n est pair.

Et pour les autres types ?

Quelques références sur cette situation de recherche :
- Da Ronch, Gandit et Gravier (2020)
- Da Ronch, Gandit et Gravier (2021)
- Bernat (2014)



Type de rectangle	$p \in 2\mathbb{N}$ $q \in 2\mathbb{N}$	$p \in 2\mathbb{N}$ $q \notin 2\mathbb{N}$	$p \notin 2\mathbb{N}$ $q \in 2\mathbb{N}$	$p \notin 2\mathbb{N}$ $q \notin 2\mathbb{N}$
$\mathcal{R}^{A}_{p\times q}$	•	•	•	
$\mathcal{R}^{\lvert B\rvert}_{p\times q}$	•		•	
$\mathcal{R}^{\overline{B}}_{p\times q}$	•	•		
$\mathcal{R}^{C}_{p\times q}$	•			•

***Tab. 2** – Existence d'un pavage (•) pour les différents types de rectangle en fonction de la parité de p et q.*

Liens avec notre problème initial

Rappel

Quels que soient les entiers $p > 0$ et $q > 0$, est-il possible de paver un rectangle de taille $p \times q$ dont les bords sont monochromes avec des tuiles de $\mathcal{T}$?

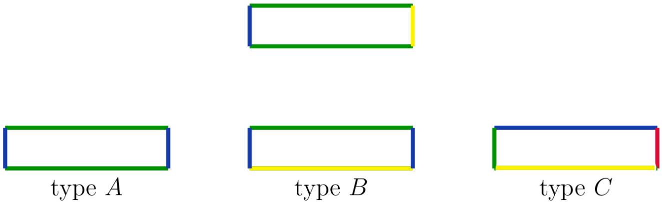


Fig. 21 – *Les différents types de rectangles.*

Liens avec notre problème initial

Théorème — Existence d'au moins un pavage de tout type

Quels que soient les entiers $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, il existe toujours au moins un pavage valide d'un certain type.

Algorithme de construction/déconstruction :

$$\mathscr{R}^{A}_{2\times 2} \longrightarrow \mathscr{R}^{A}_{p\times q} \longrightarrow \mathscr{R}^{\overline{B}}_{p\times(q-1)} \text{ OU } \mathscr{R}^{|B|}_{(p-1)\times q} \longrightarrow \mathscr{R}^{C}_{(p-1)\times(q-1)}$$

Liens avec notre problème initial

Théorème — Existence d'au moins un pavage de tout type

Quels que soient les entiers $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, il existe toujours au moins un pavage valide d'un certain type.

Algorithme de construction/déconstruction :

$$\mathscr{R}^{A}_{2\times 2} \longrightarrow \mathscr{R}^{A}_{p\times q} \longrightarrow \mathscr{R}^{\overline{B}}_{p\times(q-1)} \text{ OU } \mathscr{R}^{|B|}_{(p-1)\times q} \longrightarrow \mathscr{R}^{C}_{(p-1)\times(q-1)}$$

Théorème — CNS pour tous les types

Il faut et il suffit que $p > 1$ et $q > 1$ soient simultanément pairs pour paver n'importe quel type de rectangle de n'importe quelle taille.

Une généralisation du problème ?

" Encore mais ça
ne s'arrête jamais
ces problèmes...
Qu'est-ce que tu vas
bien pouvoir ajouter ?
"

" L'indice se trouve
derrière toi !"
(voir les annexes)

IV. Éléments d’analyse didactique

Que travaille-on avec cette (ces) situation(s) ?

Connaissances d'ordre I

- Pavage, périodicité vue comme une translation de motifs de base, symétrie axiale, rotation
- Arithmétique élémentaire : opérations dans $\mathbb{N}$, divisibilité par 2, parité, congruence
- Aire de rectangle et conservation des aires par isométries du plan
- Algorithmique : variable, condition, boucle…

Que travaille-on avec cette (ces) situation(s) ?

Connaissances d'ordre II.

- Distinction CS/CN : existence VS impossibilité ($\exists x \in X, P(x)$ **VS** $\forall x \in X, P(x)$)
- Preuve ostensive sur des cas particuliers (théorème d'existence)
- Émission de conjectures locales/globales : validation (preuve)/réfutation (contre-exemple)
- Articulation entre inductif/déductif
- Travail sur les énoncés contingents investis d'une valeur épistémique (Durand-Guerrier, 1996) et sur le statut des énoncés : distinction entre conjecture (formulation) **VS** résultat (validation)
- Construction de définitions (Ouvrier-Buffet, 2003)
- Pluralité des raisonnements : forçage, absurde, induction, partition, construction/déconstruction de classe d'objets, disjonctions des cas, exhaustivité des cas

(Da Ronch, Gandit et Gravier, 2020, p. 98)

L'importance préalable des choix sur la nature et les valeurs des variables didactiques/de recherche

I. Hypothèse de travail fondamentale

L'étude épistémologique et mathématique permet de faire des premiers choix sur la nature/valeur des variables en adéquation avec les connaissances mobilisées et visées par les situations que l'on souhaite construire.

Exemple du jour :

- Natures des régions du plan : p.ex. rectangles à bords monochromes
- Contraintes aux bords : p.ex. le type A
- Types de tuiles : {● , ● , ● , ●}
- Largeur du rectangle fixée et longueur laissée à la charge des élèves : hiérarchisation des stratégies
  - Certaines valeurs de variables permettent un travail sur les conceptions erronées (théorèmes en acte) : "La réunion de rectangles pavables avec un rectangle non pavable n'est jamais pavable." (voir p. ex., Da Ronch, Gandit et Gravier, 2021 ; Gandit, 2008, p. 188)
  - Travail sur les inférences en actes (inductive) : passage de carrés aux rectangles (conjectures naïves erronées)
  - P. ex. la stratégie de forçage est efficace localement ($3 \times q$) mais devient très coûteuse à partir du carré 5×5 de type A.

Conceptions d'étudiants/prof. stagiaires sur l'impossibilité mathématique…

Conceptions erronées d'étudiants de Licence sur l'impossibilité mathématique.

On remarque en effectuant le (5×c), avec c = un nombre impair, on retombe toujours sur la situation du (3×3) ou (1×c) qui, nous l'avons déjà dit, ne sont pas pavables, par conséquent le rectangle (5× un nombre impair de colonne) n'est pas pavable.

En découpant le (5xc) en 1*(2xc) et 1*(3xc), on se ramène au conditions des (3xc). Ce sera le cas pour tous les (lxc) avec l impair.

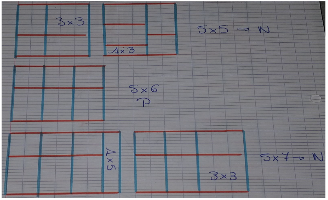
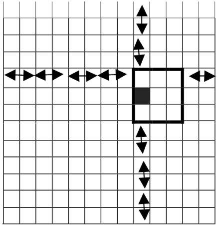


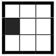
Fig. 21 – Extrait d'un mini-mémoire d'étudiants (Licence module jeux combinatoires et raisonnements mathématiques, UGA, 2019) traitant de l'impossibilité.

Conceptions d’étudiants/prof. stagiaires sur l’impossibilité mathématique...

Conceptions erronées de professeurs stagiaires sur l’impossibilité mathématique.



On place une case noire au hasard !
On s’arrange pour faire apparaître un carré de côté 3 cases (car on sait que tout est basé sur ce carré d’après ce qui précède) de telle sorte qu’il soit éloigné des bords par un nombre pair de cases ! Dans ce cas, on peut dire qu’il n’est pas pavable car le cas



ne l’est pas !

***Fig. 21** – Production de professeurs stagiaires extrait de Gandit (2008, p. 188) traitant une impossibilité sur un exemple générique ou une expérience cruciale au sens de Balacheff (1988).*

Entre didactique et ergonomie : articulations et tensions

II. Hypothèse de travail fondamentale

Importance accordée au matériel en relation avec la situation pour l'entrée dans l'activité de recherche (voir p. ex., Da Ronch, 2019 ; Da Ronch, Gandit et Gravier, 2020 ; Godot, 2005, Villani et Torossian, 2018).

- Processus de dévolution $\supset$ processus d'enrôlement
- Réflexions entre choix ergonomiques et choix didactiques (qui peuvent aussi relever de l'épistémologie même du problème mathématique)

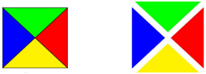


***Fig. 22** – Tuiles pré-définies (epistémologique/didactique) VS pré-découpées (ergonomique) (Da Ronch et al., 2020, pp. 98-99).*

Importance des interactions dans la construction du processus de preuve

Pour pratiquer une activité mathématique en classe et en particulier développer le processus de preuve, il est nécessaire de construire des situations permettant l'interaction :

- entre les différents ordres de connaissances (Sackur et al., 2005) ;
- la mise en œuvre de situations d'action, de formulation et de validation (Brousseau, 1998) (p. ex., modèle des SiRC).

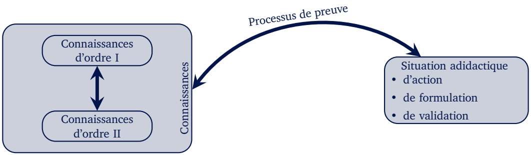


***Fig. 23** – Interactions dans la construction du processus de preuve.*

Importance des interactions dans la construction du processus de preuve

Problème/~~Casse-tête~~
(Da Ronch, 2019)

Pour pratiquer une activité mathématique en classe et en pa[...] développer le processus de preuve, il est nécessaire de constru[...] situations permettant l'interaction :

- entre les différents ordres de connaissances (Sackur et al., 2005) ;
- la mise en œuvre de situations d'action, de formulation et de validation (Brousseau, 1998) (p. ex., modèle des SiRC).

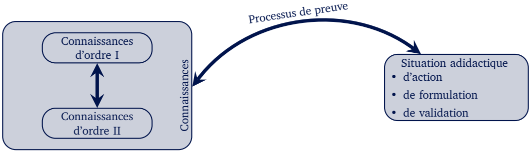


Fig. 23 – Interactions dans la construction du processus de preuve.

L’organisation didactique à ne pas négliger

Remarque sur le modèle des SiRC

Le modèle des SiRC donne des conditions nécessaires dans la construction (voire l’évaluation) d’une ressource dans le but d’entrée dans une véritable pratique mathématique mais, seules, ces conditions ne suffisent pas !

L’organisation didactique à ne pas négliger

Remarque sur le modèle des SiRC

Le modèle des SiRC donne des conditions nécessaires dans la construction (voire l’évaluation) d’une ressource dans le but d’entrée dans une véritable pratique mathématique mais, seules, ces conditions ne suffisent pas !

- La gestion est au moins aussi importante que l’élaboration de situations de recherche !

L'organisation didactique à ne pas négliger

Remarque sur le modèle des SiRC

Le modèle des SiRC donne des conditions nécessaires dans la construction (voire l'évaluation) d'une ressource dans le but d'entrée dans une véritable pratique mathématique mais, seules, ces conditions ne suffisent pas !

- La gestion est au moins aussi importante que l'élaboration de situations de recherche !
- Il faut d'une part que l'enseignant accepte de laisser la responsabilité scientifique aux élèves, et d'autre part, que les élèves acceptent eux-mêmes cette responsabilité.

L’organisation didactique à ne pas négliger

Remarque sur le modèle des SiRC

Le modèle des SiRC donne des conditions nécessaires dans la construction (voire l’évaluation) d’une ressource dans le but d’entrée dans une véritable pratique mathématique mais, seules, ces conditions ne suffisent pas !

- La gestion est au moins aussi importante que l’élaboration de situations de recherche !
- Il faut d’une part que l’enseignant accepte de laisser la responsabilité scientifique aux élèves, et d’autre part, que les élèves acceptent eux-mêmes cette responsabilité.
- Mise en commun et débat scientifique (Legrand, 1993) : importance du vrai et du faux et les raisons du vrai et du faux (Gandit et Massé-Demongeot, 2001).

Le débat scientifique

Les idées qui sous-tendent le débat scientifique (Legrand, 1993).

- Amener les élèves à se détacher du plan scolaire habituel pour se placer réellement sur le plan mathématique.
- Éviter que les élèves ne déforment trop les connaissances.
- Permettre aux élèves d'accéder à une certaine forme d'autonomie de pensée : responsabilité scientifique et esprit critique.

Le débat scientifique

Les idées qui sous-tendent le débat scientifique (Legrand, 1993).

- Amener les élèves à se détacher du plan scolaire habituel pour se placer réellement sur le plan mathématique.
- Éviter que les élèves ne déforment trop les connaissances.
- Permettre aux élèves d'accéder à une certaine forme d'autonomie de pensée : responsabilité scientifique et esprit critique.

Organisation du débat

- La recherche des élèves sur ce qu'ils pensent de la « phrase » inscrite au tableau par exemple.
- Le vote
- L'argumentation, la réfutation
- La conclusion

Institutionnalisation : du local au global

"Qu'avez-vous fait ? Qu'avez-vous appris ?"

Institutionnalisation : du local au global

“Qu’avez-vous fait ? Qu’avez-vous appris ?”

- Institutionnalisation **locale** dans le contexte du problème

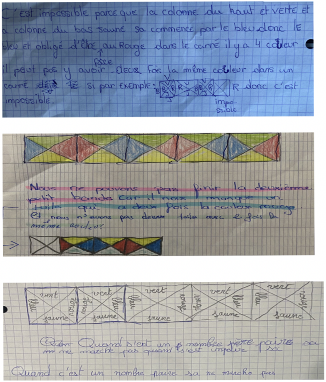
Institutionnalisation : du local au global

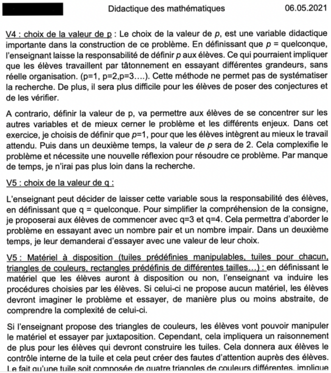
“Qu’avez-vous fait ? Qu’avez-vous appris ?”

- Institutionnalisation **locale** dans le contexte du problème
- Institutionnalisation **globale** au niveau des raisonnements mathématiques et du processus de preuve hors contexte du problème

V. Conclusion et perspectives : apports en classe et en formation des enseignants

En classe et en formation





[redacted] Didactique des mathématiques 06.05.2021

V4 : choix de la valeur de p : Le choix de la valeur de *p*, est une variable didactique importante dans la construction de ce problème. En définissant que *p* = quelconque, l'enseignant laisse la responsabilité de définir *p* aux élèves. Ce qui pourraient impliquer que les élèves travaillent par tâtonnement en essayant différentes grandeurs, sans réelle organisation. (p=1, p=2,p=3….). Cette méthode ne permet pas de systématiser la recherche. De plus, il sera plus difficile pour les élèves de poser des conjectures et de les vérifier.

A contrario, définir la valeur de p, va permettre aux élèves de se concentrer sur les autres variables et de mieux cerner le problème et les différents enjeux. Dans cet exercice, je choisis de définir que *p*=1, pour que les élèves intègrent au mieux le travail attendu. Puis dans un deuxième temps, la valeur de *p* sera de 2. Cela complexifie le problème et nécessite une nouvelle réflexion pour résoudre ce problème. Par manque de temps, je n'irai pas plus loin dans la recherche.

V5 : choix de la valeur de q :

L'enseignant peut décider de laisser cette variable sous la responsabilité des élèves, en définissant que q = quelconque. Pour simplifier la compréhension de la consigne, je proposerai aux élèves de commencer avec q=3 et q=4. Cela permettra d'aborder le problème en essayant avec un nombre pair et un nombre impair. Dans un deuxième temps, je leur demanderai d'essayer avec une valeur de leur choix.

V5 : Matériel à disposition (tuiles prédéfinies manipulables, tuiles pour chacun, triangles de couleurs, rectangles prédéfinis de différentes tailles…) : en définissant le matériel que les élèves auront à disposition ou non, l'enseignant va induire les procédures choisies par les élèves. Si celui-ci ne propose aucun matériel, les élèves devront imaginer le problème et essayer, de manière plus ou moins abstraite, de comprendre la complexité de celui-ci.

Si l'enseignant propose des triangles de couleurs, les élèves vont pouvoir manipuler le matériel et essayer par juxtaposition. Cependant, cela impliquera un raisonnement de plus pour les élèves qui devront construire les tuiles. Cela donnera aux élèves le contrôle interne de la tuile et cela peut créer des fautes d'attention auprès des élèves. Le fait qu'une tuile soit composée de quatre triangles de couleurs différentes, implique

Fig. 24 *– Productions d'élèves de cycle 3 (2020) et un extrait de l'analyse a priori d'un·e enseignant·e stagiaire dans l'UE de didactique des mathématiques (PCEO, HEPVS, 2021)*

Bibliographie

- Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (Habilitation à diriger des recherches). Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG ; Université Joseph-Fourier - Grenoble I. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426
- Berger, R. (1966). *The undecidability of the domino problem*. American Mathematical Soc.
- Bernat, J. (2014). Coloriages sous contraintes. *Découverte*, 44–47.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990*. La pensée sauvage Grenoble.
- Bruner, J. (2015). *Le développement de l'enfant: Savoir faire, savoir dire*. Presses universitaires de France.
- Church, A. (1936). An unsolvable problem of elementary number theory. *American journal of mathematics*, *58*(2), 345–363.

Bibliographie

Culik II, K. (1996). An aperiodic set of 13 wang tiles. *Discrete Mathematics*, *160*(1-3), 245–251.

Da Ronch, M. (2019). FAIT-ON DES MATHÉMATIQUES EN RÉSOLVANT DES “CASSE-TÊTES”? L’EXEMPLE DES TOURS DE HANOÏ DANS UN DISPOSITIF D’EXPOSITION. *Petit x*, *109*, 49–73. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02984756

Da Ronch, M. (2020). *Épistémologie et histoire des pavages apériodiques à partir du problème de Wang.* (Rapport interne). Institut Fourier, Université Grenoble Alpes. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03251099

Da Ronch, M., Gandit, M., & Gravier, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères IREM*, *121*, 77–105. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03030861

Bibliographie

- Da Ronch, M., Gandit, M., & Gravier, S. (2021). Learning of the scientific approach at university : The case of research situations from problems of discrete mathematics. *14th International Congress on Mathematical Education (accepted), July 11 to 18 2021, Shanghai*.
- Debrabant, P., & Busser, A. (2018). Du carreau de truchet au carreau de wang : Atteindre l'atome de l'apériodique et du calculable. *Images des Mathématiques, CNRS*.
- Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique: Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication* (Doctoral dissertation). Lyon 1.
- Gandit, M. (2008). *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement: Une ingénierie de formation* (Doctoral dissertation). Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Bibliographie

- Gandit, M., Giroud, N., & Godot, K. (2011). Les situations de recherche en classe: Un modèle de situation pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves*, 35–49.
- Gandit, M., & Massé-Demongeot, M.-C. (2001). *Le vrai et le faux au collège ou au lycée*. IREM de Grenoble.
- Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. exemple de la roue aux couleurs.* (Doctoral dissertation). Université Joseph-Fourier-Grenoble I.
- Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*.

Bibliographie

Grünbaum, B., & Shephard, G. C. (1987). *Tilings and patterns*. Courier Dover Publications.

Hilbert, D., & Ackerman, W. (1928). Grundzüge der theoretischen logik. *Julius Springer, Berlin*.

Jeandel, E., & Rao, M. (2015). An aperiodic set of 11 wang tiles. *CoRR, abs/1506.06492*. http://arxiv.org/abs/1506.06492

Kahr, A. S., Moore, E. F., & Wang, H. (1962). Entscheidungsproblem reduced to the aea case. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *48*(3), 365.

Kari, J. (1996). A small aperiodic set of wang tiles. *Discrete Mathematics*, *160*(1-3), 259–264.

Knuth, D. E. (1968). The art of computer programming, vol. 1: Fundamental algorithm addison-wesley. *Reading, Mass*, 634.

Bibliographie

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques. *Repères irem*, *10*, 123–159.

Lewis, H. R. (1978). Complexity of solvable cases of the decision problem for the predicate calculus. *19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1978)*, 35–47.

Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques* (Thèse de doctorat). Université Joseph-Fourier - Grenoble I. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515

Penrose, R. (1979). Pentaplexity a class of non-periodic tilings of the plane. *The mathematical intelligencer*, *2*(1), 32–37.

Robinson, R. M. (1971). Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones mathematicae*, *12*(3), 177–209.

Bibliographie

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P., & Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, *25*(1), 57–90.

Turing, A. M. (1937). On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London mathematical society*, *2*(1), 230–265.

Villani, C., Torossian, C., & Dias, T. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.

Wang, H. (1961). Proving theorems by pattern recognition—ii. *Bell system technical journal*, *40*(1), 1–41.

Annexes : compléments épistémologiques et ouverture vers d'autres situations étudiées dans Da Ronch (thèse en cours)

Une généralisation du problème ?

Problème du $\min_{\mathcal{X}}$

Sous quelle(s) condition(s) peut-on paver **tous** les types de rectangle, **quelle que soit** la parité de $p > 1$ et $q > 1$ tout en gardant la même structure de tuiles ?

Une généralisation du problème ?

Problème du $\min_{\mathcal{X}}$

Sous quelle(s) condition(s) peut-on paver **tous** les types de rectangle, **quelle que soit** la parité de $p > 1$ et $q > 1$ tout en gardant la même structure de tuiles ?

On considère un ensemble $\mathcal{X}$ de k couleurs tel que

$$\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, k-1,\ k\}$$

Une généralisation du problème ?

Problème du $\min_{\mathcal{X}}$

Sous quelle(s) condition(s) peut-on paver **tous** les types de rectangle, **quelle que soit** la parité de $p > 1$ et $q > 1$ tout en gardant la même structure de tuiles ?

On considère un ensemble $\mathcal{X}$ de k couleurs tel que

$$\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots, k-1,\ k\}$$

On construit un jeu de tuiles $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$-complet (ayant tous les 4-arrangements possibles).

$$\#\mathcal{T}_{\#\mathcal{X}} = A_k^4 = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k-4)!} = k \times (k-1) \times (k-2) \times (k-3) & , \quad \text{si } k \geqslant 4 \\ 0 & , \quad \text{si } k \leqslant 3 \end{cases}$$

Une généralisation du problème ?

Théorème — CNS $\min_{\chi}$

Le nombre minimal de couleurs noté $\min_{\#\chi}$ pour paver n'importe quel type de rectangle, de n'importe quelle taille est tel que $\min_{\#\chi} = 5$.

Une généralisation du problème ?

Théorème — CNS $\min_{\mathcal{X}}$

Le nombre minimal de couleurs noté $\min_{\#\mathcal{X}}$ pour paver n'importe quel type de rectangle, de n'importe quelle taille est tel que $\min_{\#\mathcal{X}} = 5$.

Idées clés

- $\min_{\#\mathcal{X}} \geqslant 5$, au moins 5 couleurs sont nécessaires d'après les résultats établis lorsque $\#\mathcal{X} = 4$.
- $\min_{\#\mathcal{X}} \leqslant 5$, au plus 5 couleurs suffisent pour paver tous les types de rectangles, quels que soient les entiers $p > 1$ et $q > 1$. On prouve en fait l'existence d'au moins un pavage sur tous les cas d'impossibilité mis en avant lorsque $\#\mathcal{X} = 4$.

Problème $\min_{\mathcal{T}_{\mathcal{X}}}$ lorsque $\#\mathcal{X} = 5$

Quel est le nombre nécessaire et suffisant de tuiles parmi les 120 de notre collection qui permet de paver tous les types de rectangles, et ce, quels que soient les entiers $p > 1$ et $q > 1$?

$\mathcal{NP}$-complétude sur les rectangles même avec des bords monochromes

De manière générale le problème de Wang sur les rectangles est difficile...

Théorème (Lewis, 1978)

WANG-REC est $\mathcal{NP}$-complet.

$\mathcal{NP}$-complétude sur les rectangles même avec des bords monochromes

De manière générale le problème de Wang sur les rectangles est difficile...

Théorème (Lewis, 1978)

WANG-REC est $\mathcal{NP}$-complet.

On prouve même qu'avec un, deux, trois ou quatre bords monochromes, distincts ou non, le problème est toujours au moins aussi difficile que celui sans contrainte !

Corollaire

WANG-REC-k-MONOCHROME est aussi $\mathcal{NP}$-Complet pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$\mathcal{NP}$-complétude sur les rectangles même avec des bords monochromes

De manière générale le problème de Wang sur les rectangles est difficile...

Théorème (Lewis, 1978)

WANG-REC est $\mathcal{NP}$-complet.

On prouve même qu'avec un, deux, trois ou quatre bords monochromes, distincts ou non, le problème est toujours au moins aussi difficile que celui sans contrainte !

Corollaire

WANG-REC-k-MONOCHROME est aussi $\mathcal{NP}$-Complet pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Heureusement la réflexion menée dans l'analyse *a priori* sur la nature et les valeurs des variables nous permet de rendre le problème accessible en classe de mathématiques, et ce, dès le cycle 3 jusqu'à l'université !

Vers d'autres situations de recherche...

Si on "agrandissait" les surfaces à paver....

Le cas des régions semi-bornées de $\mathbb{Z}^2$

Problème sur des régions semi-bornées

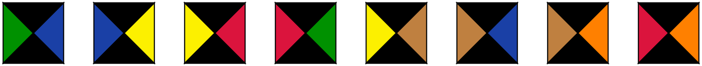
Étant donné une collection finie de tuiles, existe-il un pavage d'une bande bi-infinie pour une hauteur entière $h > 0$ fixée ?

Le cas des régions semi-bornées de $\mathbb{Z}^2$

Problème sur des régions semi-bornées

Étant donné une collection finie de tuiles, existe-il un pavage d'une bande bi-infinie pour une hauteur entière $h > 0$ fixée ?

Un exemple

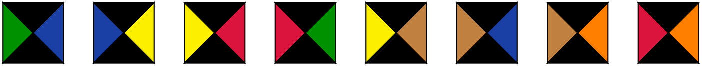


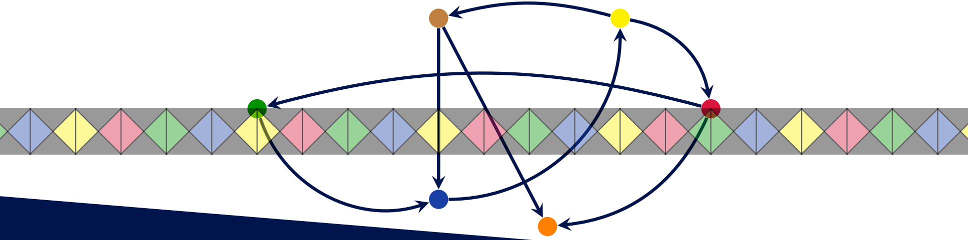
Le cas des régions semi-bornées de $\mathbb{Z}^2$

Problème sur des régions semi-bornées

Étant donné une collection finie de tuiles, existe-il un pavage d'une bande bi-infinie pour une hauteur entière $h > 0$ fixée ?

Un exemple



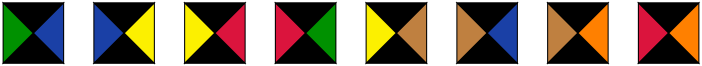


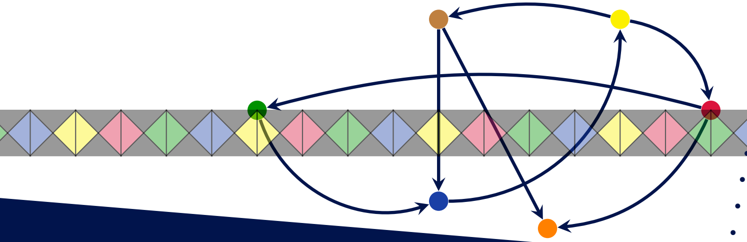
Le cas des régions semi-bornées de $\mathbb{Z}^2$

Problème sur des régions semi-bornées

Étant donné une collection finie de tuiles, existe-il un pavage d'une bande bi-infinie pour une hauteur entière $h > 0$ fixée ?

Un exemple



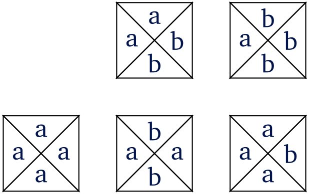


- Problème de recherche de circuit
- Problème eulérien
- Problème de la maille
- Problème hamiltonien
- ...

Le cas non borné $\mathbb{Z}^2$

Problème sur $\mathbb{Z}^2$

Étant donné un ensemble fini de couleurs et une certaine famille $\mathscr{F}_i$ d'au plus deux couleurs par tuiles, existe-il un pavage du plan $\mathbb{Z}^2$ avec des tuiles de cette famille ?



$\mathscr{F}_1$ $\mathscr{F}_2$ $\mathscr{F}_3$