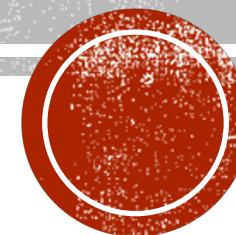


Les modes de raisonnement et de preuve comme apprentissages possibles de la résolution de problèmes en mathématiques

Maud Chanudet, maud.chanudet@unige.ch
Stéphane Favier, stephane.favier@unige.ch

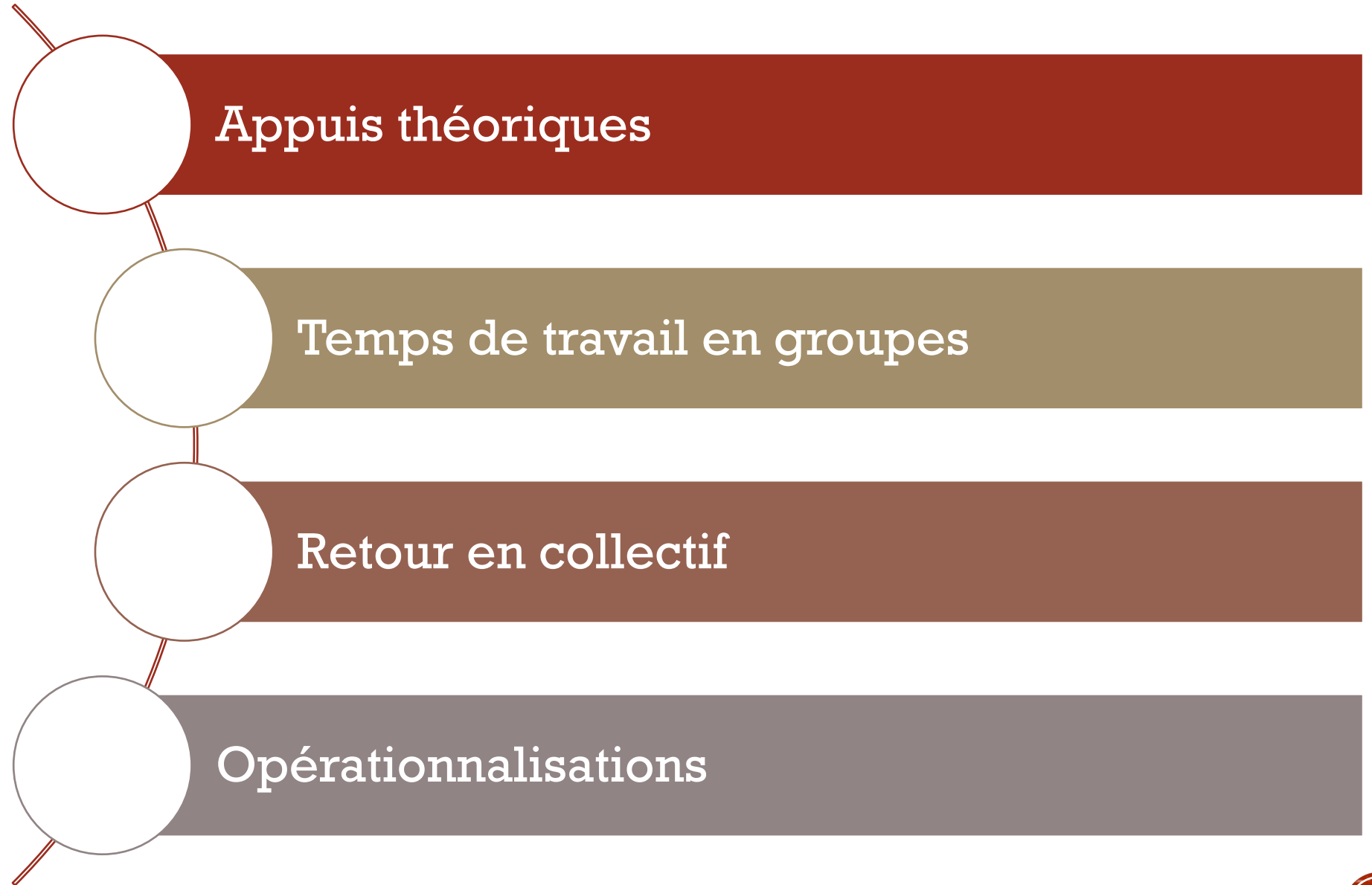


OBJECTIF DE L'ATELIER

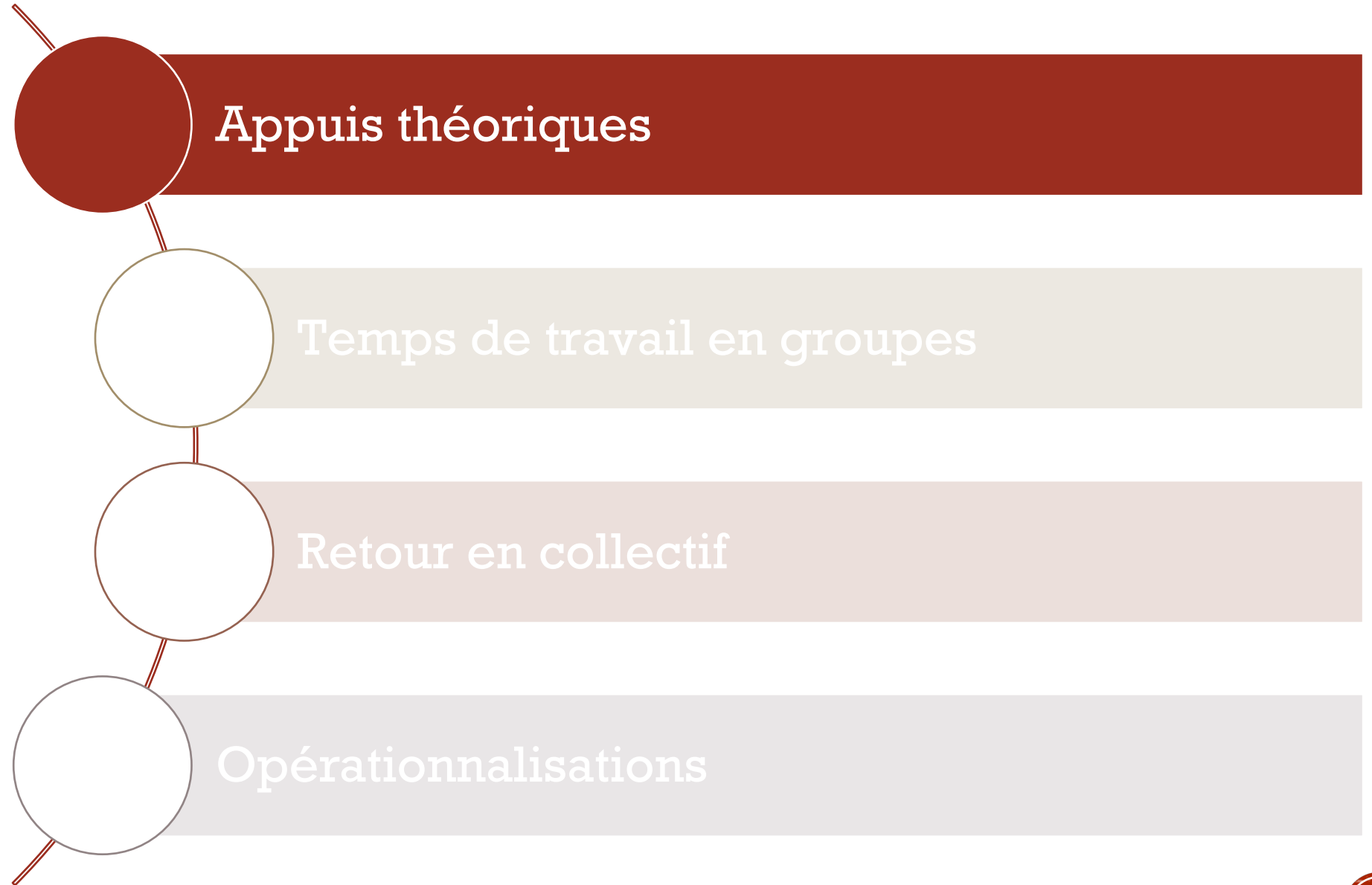
Identifier le potentiel didactique en termes de démarches et de modes de raisonnement en jeu dans les problèmes.



PLAN



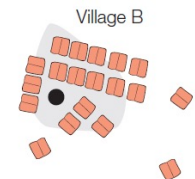
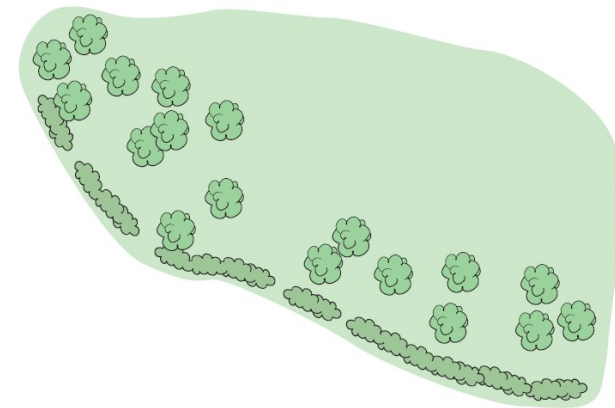
PLAN



LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES EN MATHÉMATIQUES

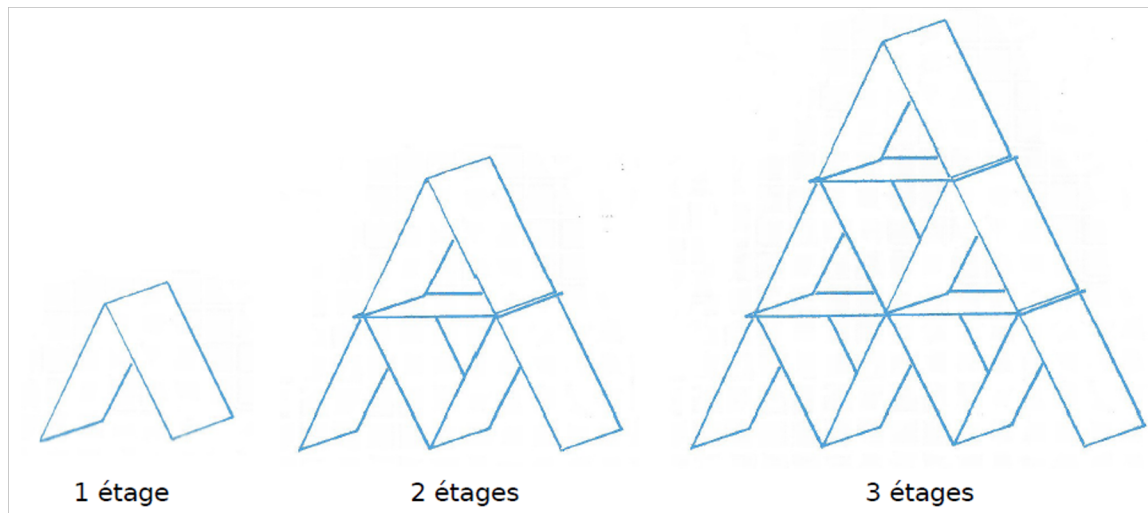
Outil, moyen de développer et d'évaluer les apprentissages

Deux villages envisagent la construction d'une déchetterie commune. Pour des raisons de calme et de tranquillité, celle-ci devra être construite à l'orée de la forêt, mais obligatoirement à égale distance des deux localités. Où la déchetterie devra-t-elle être construite ?



LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES EN MATHÉMATIQUES

Objet
d'enseignement et
d'apprentissage



Pour construire un château de cartes à un étage il faut 2 cartes, pour un château de cartes à deux étages il faut 7 cartes et pour un château de cartes à trois étages il faut 15 cartes. Combien faut-il de cartes pour construire un château à 7 étages ? A 30 étages ? A 100 étages ?

QUELS APPRENTISSAGES EN RÉOLUTION DE PROBLÈMES EN MATHÉMATIQUES?

Objectifs possibles pour les problèmes de type « problèmes pour chercher » :

- Réinvestissement de savoirs
 - **Apprentissages liés au raisonnement**
 - **Apprentissages liés à la validation (*primaire*), à la preuve (*secondaire*)**
- + Modélisation

LE RAISONNEMENT EN MATHÉMATIQUES

Différentes manières complémentaires de caractériser le raisonnement en mathématiques :

- du point de vue de **sa structure logique** : comment s'organisent et s'enchainent les pas de raisonnement ?
- du point de vue des **processus mobilisés** : raisonnement considéré comme un ensemble d'actions dirigées vers un but

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE STRUCTUREL

Déductif

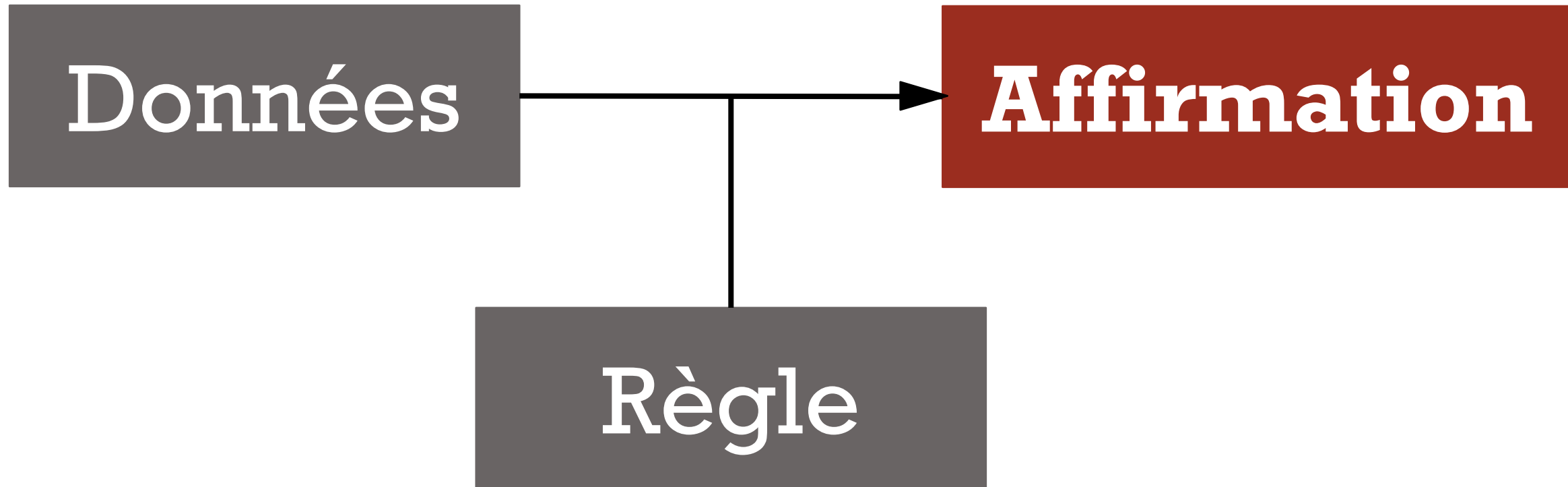
Inductif

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE STRUCTUREL

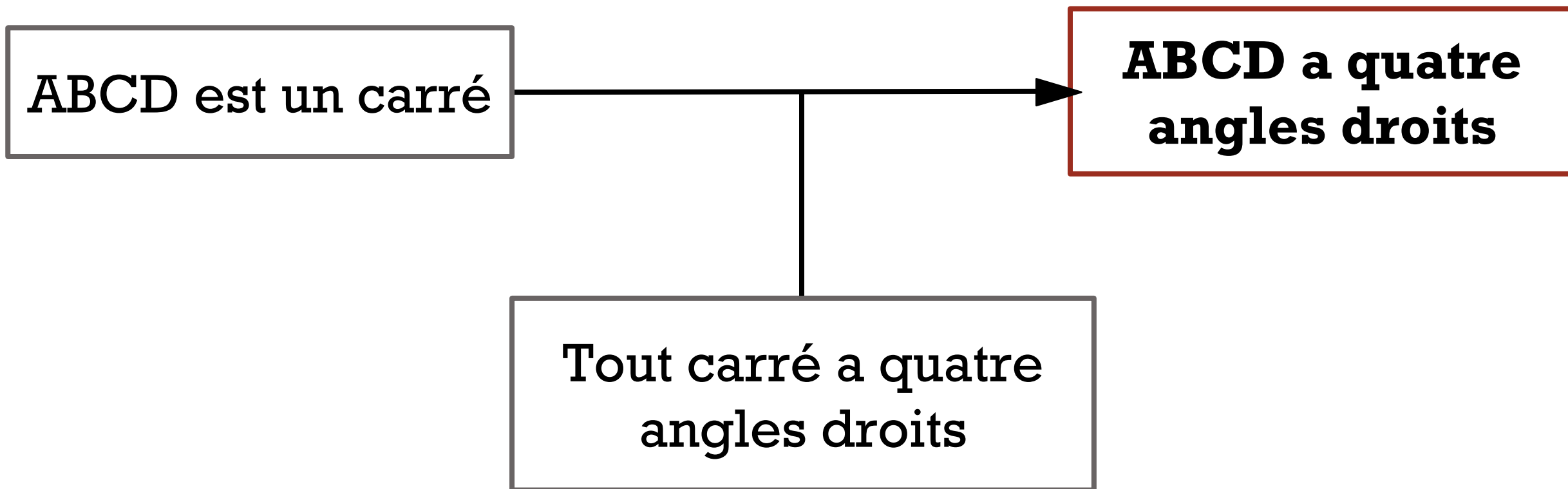
Déductif

Inductif

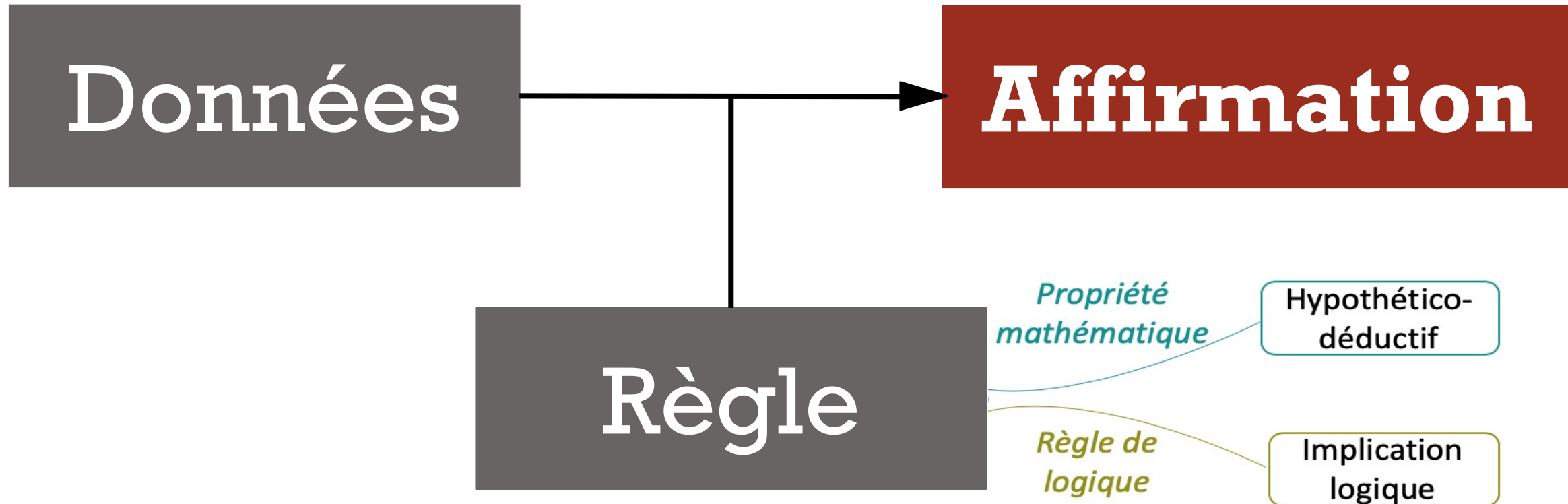
PAS DE RAISONNEMENT DÉDUCTIF



EXEMPLE DE PAS DE RAISONNEMENT DÉDUCTIF



PAS DE RAISONNEMENT DÉDUCTIF



LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE STRUCTUREL

- Le **raisonnement hypothético-déductif** est un raisonnement déductif dont la règle est en lien avec des savoirs mathématiques qui sont des objets d'enseignement identifiés dans les programmes et travaillés explicitement avec les élèves.
- Le **raisonnement par implication logique** est un raisonnement déductif dont la règle est seulement liée aux notions de logique (par exemple la règle du tiers exclus).

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE STRUCTUREL

- **Le raisonnement par exhaustivité des cas** qui consiste de manière générale à tester l'une après l'autre, après les avoir énumérées, toutes les solutions potentielles du problème (Battie, 2003)
- **Le raisonnement par disjonction de cas** qui consiste à ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas. Pour cela, on partitionne les éléments de l'ensemble considéré (en nombre a priori infini) et on traite séparément chacun des cas (Battie, 2003)

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE STRUCTUREL

Déductif

```
graph TD; A[Déductif] --- B[Hypothético-déductif]; A --- C[Par implication logique]; A --- D[Par exhaustivité des cas]; A --- E[Par disjonction de cas];
```

Hypothético-déductif

Par implication logique

Par exhaustivité des cas

Par disjonction de cas

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE STRUCTUREL

Déductif

Hypothético-déductif

Par implication logique

Par exhaustivité des cas

Par disjonction de cas

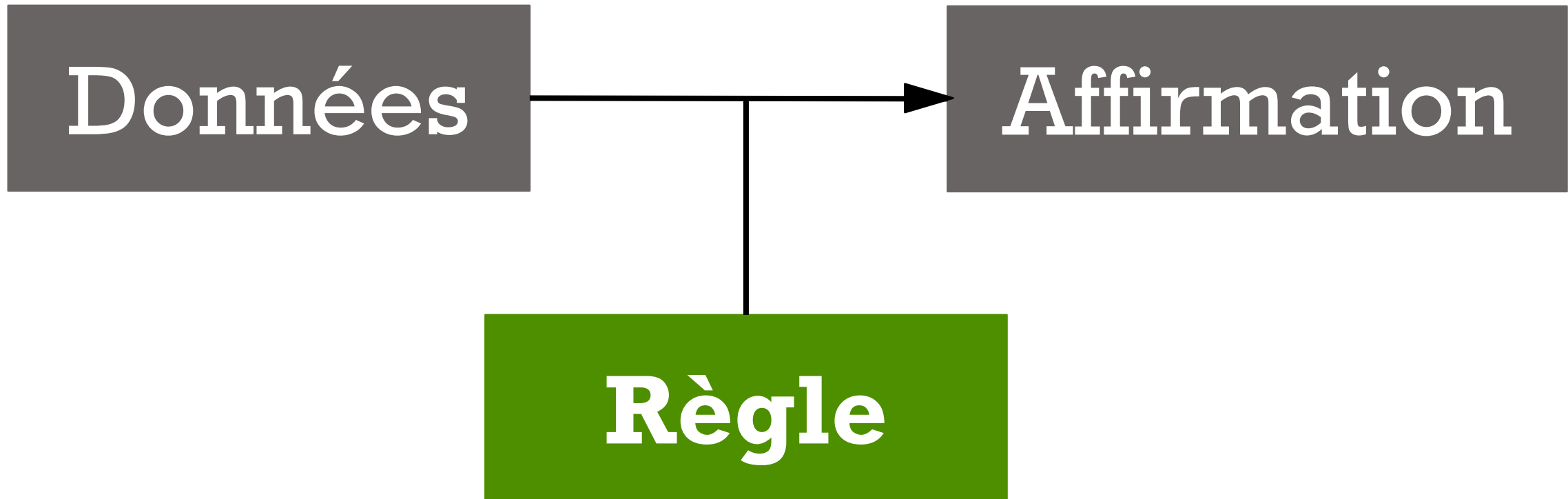
Preuve :
découle du
raisonnement

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE STRUCTUREL

Déductif

Inductif

PAS DE RAISONNEMENT INDUCTIF



EXEMPLE DE PAS DE RAISONNEMENT INDUCTIF

n	n^2-n+11
0	11
1	11
2	13
3	17
4	23
5	31
6	41
7	53

11; 13; 17; 23; 31; 41;
53 sont des nombres
premiers

**n^2-n+11 est toujours
un nombre premier**

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE STRUCTUREL

Déductif

Hypothético-déductif

Par implication logique

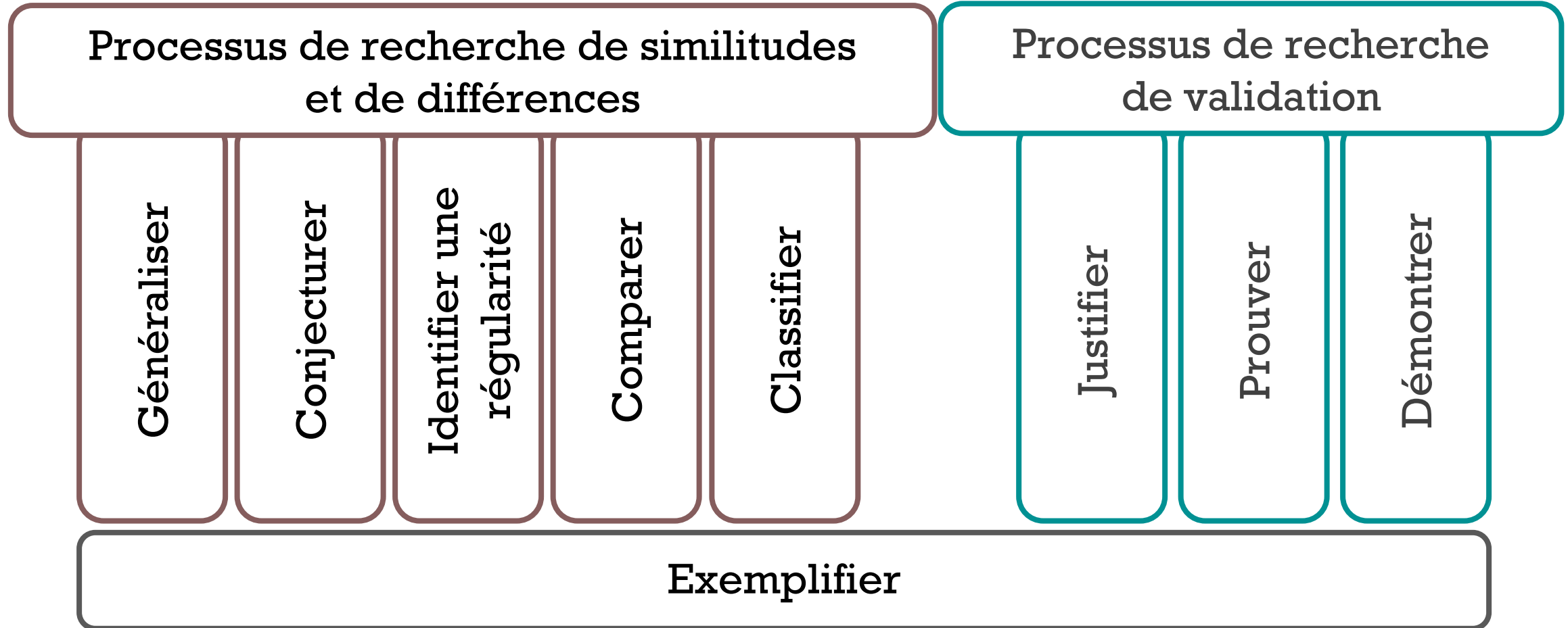
Par exhaustivité des cas

Par disjonction de cas

Inductif

Localement en jeu dans une démarche
expérimentale

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE : POINT DE VUE DES PROCESSUS MOBILISÉS



DEUX DÉMARCHES

- la **démarche expérimentale** qui articule des phases d'expérimentations (faire des expériences, en observer les résultats et en inférer des conclusions), avec des phases de formulation de conjectures et de tentative de preuve (Gardes, 2013),
→ les **processus d'exemplification, d'identification d'une régularité, de conjecture, et de généralisation.**

Preuve :
recours à des
raisonnements
déductifs

DEUX DÉMARCHES

- la **démarche d'ajustements d'essais successifs** qui consiste à
« rechercher la solution d'un problème en faisant différents essais en tenant compte chaque fois des résultats des essais précédents » (CIIP, 2019)
→ les **processus d'exemplification**, de **comparaison** de l'écart entre le résultat obtenu et celui attendu afin d'ajuster ses essais pour s'en approcher.



Preuve par
ostension

Modes de raisonnement

Démarche
expérimentale

Ajustements d'essais
successifs

Exhaustivité des cas

Implication logique

Hypothético-déductif

Par disjonction de cas

Modes de preuve

Ostension

Contre exemple

DIFFÉRENTS POTENTIELS POUR LES ARPP

[ACTIVITÉS DE RECHERCHE ET DE PREUVE ENTRE PAIRS]

- Recherche
- Résistance et résistance dynamique
- Didactique
- Débat

DIFFÉRENTS POTENTIELS POUR LES ARPP

[ACTIVITÉS DE RECHERCHE ET DE PREUVE ENTRE PAIRS]

“

Potentiel didactique

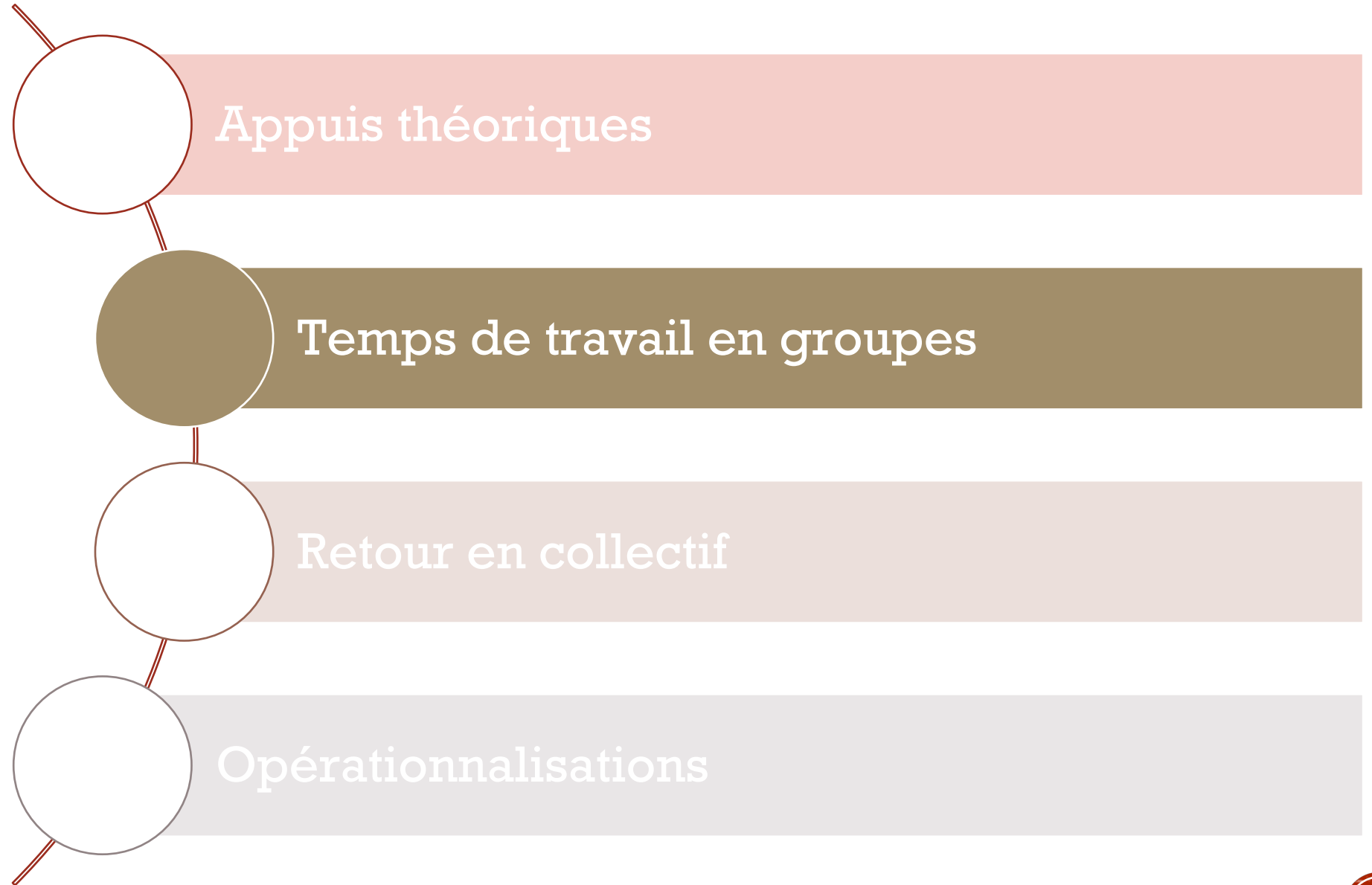
ce que les élèves sont, a priori, susceptibles d'apprendre au cours des séances qui lui [aux ARPP] sont consacrées. (Georget, 2009)

”



Opérationnaliser ce concept de potentiel didactique à la lumière des démarches et modes de raisonnement

PLAN



ANALYSE DU POTENTIEL DIDACTIQUE DES ARPP EN TERMES DE DMR

Résolution des ARPP en adoptant un point de vue d'élèves
(et non d'experts)

Identification du potentiel didactique c'est-à-dire la démarche ou le mode de raisonnement que nous pourrions travailler avec les élèves

Démarche
expérimentale

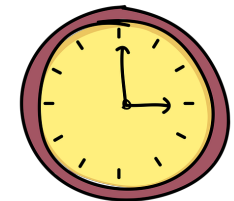
Ajustements d'essais
successifs

Exhaustivité des cas

Implication logique

Hypothético-déductif

Disjonction de cas



30 minutes

PLAN

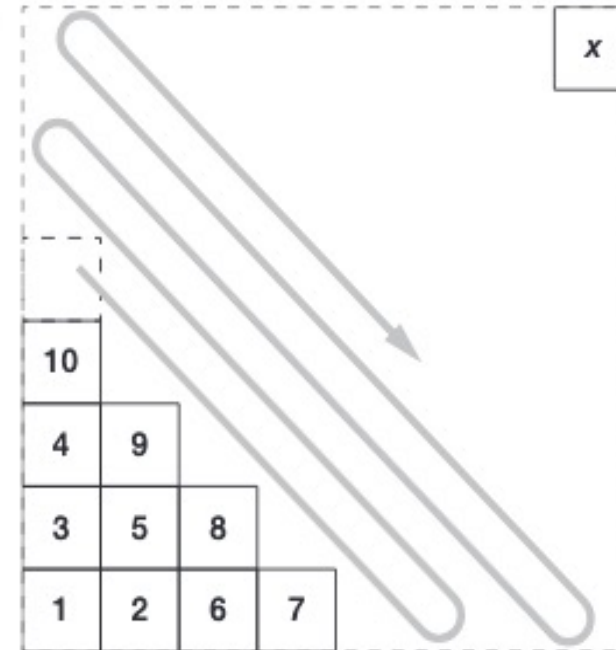


En haut à droite

Pascal dessine de grands carrés, qu'il divise ensuite en carrés plus petits. Il écrit alors les entiers successifs dans chaque petit carré dessiné, comme l'indique la figure ci-contre.

Parmi les trois valeurs proposées, quelle est celle que le nombre x ne pourra pas prendre ?

- a) 256 b) 128 c) 81



Potentiel didactique: démarche expérimentale

Ballon d'essai

Afin de renouveler son matériel sportif, une école fait une première commande de 2 ballons de rugby, 4 ballons de basket et 4 ballons de foot pour un montant total de 72 CHF. Elle effectue ensuite une deuxième commande composée de 2 ballons de rugby et 2 ballons de basket et paie 30 CHF. On sait qu'un ballon de rugby, un ballon de foot et un ballon de basket coûtent ensemble 20 CHF.

Quel est le prix de chacun des ballons ?

Potentiel didactique: - Démarche d'ajustements d'essais successifs ou
- Raisonnement hypothético-déductif

Les truffes au chocolat

Maryvonne et Marcelin ont reçu une boîte contenant vingt truffes au chocolat.
A eux deux, ils ont tout mangé.

Maryvonne: « J'ai mangé moins de quatorze truffes au chocolat. »

Marcelin: « Moi aussi. »

Maryvonne: « Mais j'en ai mangé plus de huit. »

Marcelin: « Je suis sûr et certain d'en avoir mangé moins que toi. »

Chacun des deux a dit la vérité une fois et s'est trompé une fois.

Combien Maryvonne a-t-elle mangé de truffes au chocolat ?

Potentiel didactique: - raisonnement par exhaustivité des cas et
- raisonnement par implication logique

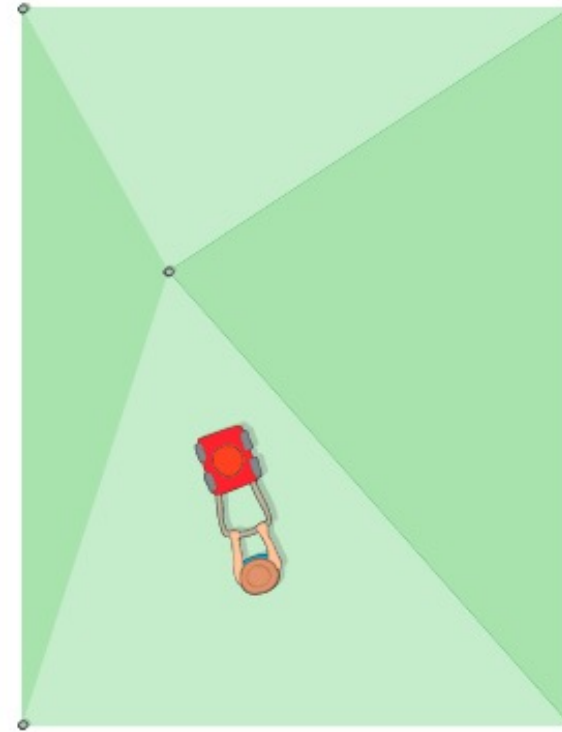
À tondre !

Anne et Florence doivent tondre un terrain rectangulaire.

Pour le partager en deux parties de même aire, Chris leur propose de planter un piquet en un point quelconque du terrain et de relier ce point aux piquets plantés à chacun des quatre sommets du terrain.

Anne tondra la partie claire sur la figure, Florence la partie foncée.

Le partage est-il équitable ?



Potentiel didactique: Raisonnement hypothético-déductif

Animal à découvrir

Kim doit découvrir le nom d'un animal (en cinq lettres). Elle a proposé les noms ci-dessous, et a obtenu ces renseignements :

Noms d'animaux	Lettres justes bien placées	Lettres justes mal placées
CHATS	0	2
LIONS	1	0
TIGRE	2	0
PAONS	0	0
BŒUF	1	1
CHIEN	0	4

Quel est le nom de l'animal que Kim doit découvrir ?

Potentiel didactique: Raisonnement par implication logique

Puissance

Quel est le dernier chiffre du nombre 2^{2021} ?

Potentiel didactique: - Démarche expérimentale et
- Raisonnement hypothético-déductif

PLAN



POINT DE DÉPART DU RECYCLAGE

- **Constats :**
 - difficultés des enseignants à définir des objectifs d'apprentissage pour le cours de DMS, à organiser leur enseignement, à évaluer les apprentissages des élèves
 - ressource peu claire, liste de problèmes non organisée
- **Objectifs :** proposer un outil pour choisir des problèmes et organiser la planification pour ce cours

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Limites de la classification actuelle

Intitulé peu explicite

	NO	ES & GM	FA
Initiation à la démonstration	NO1 - NO2 - NO2bis NO5 - NO6 - NO7 N9 - NO10 - NO11 NO12 - NO14- NO16 NO18 - NO22 - NO23	ES2 - ES4 - ES5 ES6 - ES12 - ES13 ES16	FA1 - FA2 - FA4 FA5 - FA7 - FA8 FA9 - FA10
Chainage avant / arrière		ES1 - ES3 - ES7 ES8 - ES9 - ES10 ES11 - ES14 - ES15 ES17 - ES18	FA3 - FA12
Exemples / contre-exemples	NO1 - NO2 - NO2bis NO3		FA1 - FA2 - FA8 FA10
Exhaustivité	NO4 - NO4bis - NO8 NO13 - NO15 - NO17 NO19 - NO20 - NO21		FA6 - FA11

Limites de la classification actuelle

Etude de quatre problèmes (FA8, FA10, NO1, NO2) classés dans Exemples/contre-exemples.

	NO	ES & GM	FA
Initiation à la démonstration	NO1 - NO2 - NO2bis NO5 - NO6 - NO7 N9 - NO10 - NO11 NO12 - NO14- NO16 NO18 - NO22 - NO23	ES2 - ES4 - ES5 ES6 - ES12 - ES13 ES16	FA1 - FA2 - FA4 FA5 - FA7 - FA8 FA9 - FA10
Chainage avant / arrière		ES1 - ES3 - ES7 ES8 - ES9 - ES10 ES11 - ES14 - ES15 ES17 - ES18	FA3 - FA12
Exemples / contre-exemples	NO1 - NO2 - NO2bis NO3		FA1 - FA2 - FA8 FA10
Exhaustivité	NO4 - NO4bis - NO8 NO13 - NO15 - NO17 NO19 - NO20 - NO21		FA6 - FA11

Regroupement
peu
opérationnel

Limites de la classification actuelle

Etude de quatre problèmes (FA8, FA10, NO1, NO2) classés dans Exemples/contre-exemples.

	NO	ES & GM	FA
Initiation à la démonstration	NO1 - NO2 - NO2bis NO5 - NO6 - NO7 N9 - NO10 - NO11 NO12 - NO14- NO16 NO18 - NO22 - NO23	ES2 - ES4 - ES5 ES6 - ES12 - ES13 ES16	FA1 - FA2 - FA4 FA5 - FA7 - FA8 FA9 - FA10
Chainage avant / arrière		ES1 - ES3 - ES7 ES8 - ES9 - ES10 ES11 - ES14 - ES15 ES17 - ES18	FA3 - FA12
Exemples / contre-exemples	NO1 - NO2 - NO2bis NO3		FA1 - FA2 - FA8 FA10
Exhaustivité	NO4 - NO4bis - NO8 NO13 - NO15 - NO17 NO19 - NO20 - NO21		FA6 - FA11

Regroupement
peu
opérationnel

Pour chacun d'eux : le résoudre et **identifier le rôle des exemples et contre-exemples.**

Limites de la classification actuelle

Etude de quatre problèmes (FA8, FA10, NO1, NO2) classés dans Exemples/contre-exemples.

	NO	ES & GM	FA
Initiation à la démonstration	NO1 - NO2 - NO2bis NO5 - NO6 - NO7 N9 - NO10 - NO11 NO12 - NO14- NO16 NO18 - NO22 - NO23	ES2 - ES4 - ES5 ES6 - ES12 - ES13 ES16	FA1 - FA2 - FA4 FA5 - FA7 - FA8 FA9 - FA10
Chainage avant / arrière		ES1 - ES3 - ES7 ES8 - ES9 - ES10 ES11 - ES14 - ES15 ES17 - ES18	FA3 - FA12
Exemples / contre-exemples	NO1 - NO2 - NO2bis NO3		FA1 - FA2 - FA8 FA10
Exhaustivité	NO4 - NO4bis - NO8 NO13 - NO15 - NO17 NO19 - NO20 - NO21		FA6 - FA11

Regroupement
peu
opérationnel

Trouver un contre-exemple

Tester une conjecture

Aide pour s'appropriier le problème

Exemple qui prouve (ostension)

Pour chacun d'eux : le résoudre et **identifier le rôle des exemples et contre-exemples.**

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Présentation des modes de
raisonnement

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Présentation des modes de
raisonnement

Appropriation des modes de
raisonnement

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Présentation des modes de
raisonnement

Appropriation des modes de
raisonnement

Planification par mode de
raisonnement

Démarche Expérimentale

Les réverbères

Le long d'un grand boulevard, il y a 250 réverbères éteints, tous du même côté de la route. Au pied de chacun se trouve un bouton. Si on appuie une fois dessus, le lampadaire s'allume, si on appuie à nouveau, alors il s'éteint. L'allumeur de réverbères décide de les allumer selon l'algorithme suivant :

- En partant du premier réverbère, il appuie sur tous les boutons.
- Puis il revient au début du boulevard et en partant du deuxième, il appuie sur 1 bouton sur 2.
- Puis il revient au début du boulevard et en partant du troisième, il appuie sur 1 bouton sur 3.
- Puis il revient au début du boulevard et en partant du quatrième, il appuie sur 1 bouton sur 4.
- Et ainsi de suite jusqu'au deux cent cinquantième réverbère.



GROUPE démarche expérimentale

A la fin, quels sont les réverbères allumés ?

NOB. Sommes et produits

On s'intéresse aux diverses façons d'écrire un nombre n en somme de nombres entiers naturels (pour éviter les répétitions, les termes de la somme sont écrits dans l'ordre croissant). Par exemple :

$$5 = 1+1+1+1+1, \quad 5 = 1+1+1+2, \quad 5 = 1+1+3, \quad 5 = 1+2+2, \quad 5 = 1+4, \quad 5 = 2+3$$

On s'intéresse aux diverses façons d'écrire un nombre n en produit de nombres entiers naturels (pour éviter les répétitions, les termes du produit sont écrits dans l'ordre croissant). Par exemple :

- a) Quelles sont les décompositions possibles du nombre 5 ? Quels sont les produits correspondants ? Lequel est le plus grand ?
- b) On s'intéresse à présent aux décompositions possibles du nombre 28 où apparaît le nombre 1. On appelle P le produit associé. Trouver une décomposition dont le produit associé est supérieur à P .
 - On considère une décomposition quelconque du nombre 28 où apparaît le nombre 1. On appelle P le produit associé. Trouver une décomposition dont le produit associé est supérieur à P .
 - On considère une décomposition quelconque du nombre 28 où apparaît le nombre 5. On appelle R le produit associé. Trouver une décomposition dont le produit associé est supérieur à R .
- Quelles décompositions de 28 donnent le plus grand produit associé ?

RS2. Le chiffre des unités

Quel est le chiffre des unités de 7^{2013} ?

Implication logique

Truffes au chocolat

On a reçu une boîte contenant vingt truffes au chocolat. On en a mangé une.

GROUPE Implication logique

On a mangé une truffe au chocolat.

On a mangé de truffes au chocolat ?

ment

Quatre des six finalistes du cross de l'école.

« arrivé, Paulette était déjà là. »

« après Jacques, Claude et Marcel. »

« juste avant Marcel. Françoise était déjà là, mais elle n'a pas pu participer. »

« mé être la première ! »

Quelle a été l'ordre de passage ?

dent

On a tous eu un dessert différent aujourd'hui.

« le même jour n'ont pas voulu la glace. »

« dans le flan au caramel de sa sœur. »

« partie de sa crème au chocolat et de sa glace. »

« ? »

be ?

On a trouvé un trésor, un autre trésor, et le dernier est vide.

Sachant que seule l'étiquette du coffre contenant le trésor dit la vérité, dans quel coffre se trouve le trésor ?



RS8 Les neuf billes

Essais-ajustements

Samantha a acheté neuf billes.

Toutes les billes ont une masse de 5 g, sauf une dont la masse vaut 6 g.

Samantha veut retrouver cette bille ; elle a à sa disposition uniquement une balance à deux plateaux.

En utilisant au maximum trois fois la balance, comment peut-elle s'y prendre pour découvrir avec certitude la bille de 6 g ?

RS13 La cible

Place tous les nombres de 1 à 9 dans les petits disques colorés de façon que la somme des nombres se trouvant sur chaque cercle concentrique et sur chaque rayon soit toujours la même.



GROUPE essais ajustements

ES8.

Le milieu du segment

Soient d_1 et d_2 deux demi-droites de même origine O et soit P un point contenu dans le secteur angulaire défini par ces deux demi-droites. Déterminer deux points M et N respectivement sur d_1 et d_2 tels que P soit le milieu du segment (MN) .

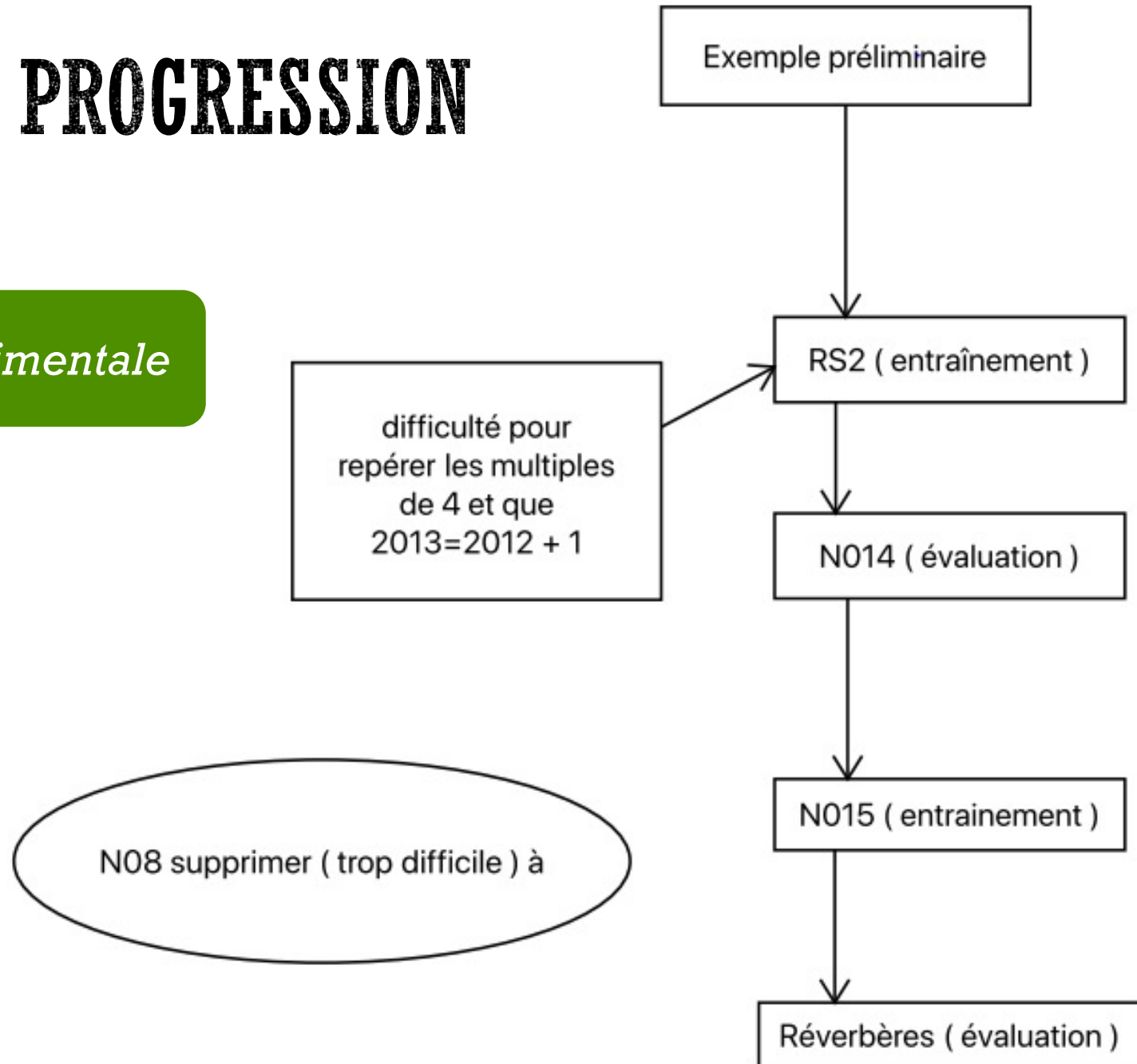
ES7.

Géométrie minimaliste

Soient d_1 et d_2 deux demi-droites de même origine O et soit P un point contenu dans le secteur angulaire défini par ces deux demi-droites. Construire le triangle de plus petit périmètre, de sommet P et dont les deux autres sommets sont respectivement sur chacune des demi-droites.

PROPOSITION DE PROGRESSION

GROUPE *démarche expérimentale*



CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Présentation des modes de
raisonnement

Appropriation des modes de
raisonnement

Planification par mode de
raisonnement

Implication
logique

Hypothético-
déductif

Exhaustivité
des cas

Essais
ajustements

Démarche
expérimentale

*Une DMR par groupe
puis mutualisation du travail de chaque groupe*

CONTENU DU RECYCLAGE

Limites de la classification actuelle

Présentation des modes de
raisonnement

Appropriation des modes de
raisonnement

Planification par mode de
raisonnement

Implication
logique

Hypothético-
déductif

Exhaustivité
des cas

Essais
ajustements

Démarche
expérimentale

*Une DMR par groupe
puis mutualisation du travail de chaque groupe*

Réflexion sur la planification
annuelle

QUESTION DE LA PLANIFICATION



...

A L'ISSUE DU RECYCLAGE

Les participants repartent avec :

- Des **critères mathématiques de classement** et d'**organisation** des problèmes en terme d'apprentissage qu'ils ont pu s'approprier
- Une sélection de problèmes classés par objectif d'apprentissage

issus des ressources institutionnelles

- Chapitre R&S 10^e

- Réserve activités cours DMS

+

problèmes
complémentaires

- Des éléments de réflexion pour élaborer une planification annuelle

DEUX OPÉRATIONNALISATIONS

- Chanudet, M. (2019). Etude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques (Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation). Université de Genève.
- Chanudet, M., & Favier, S. (2021). Les démarches et modes de raisonnement en jeu dans les problèmes de « Recherche & stratégies » en 10H. *Revue de mathématiques pour l'école*, (235), 88-98.

Merci pour votre attention et votre participation

