Définir et prouver : quelles interactions ?

Cécile Ouvrier-Buffet

Université Paris-Est Créteil – Laboratoire de Didactique André Revuz

CORFEM 2021

Definition is indefinable.

This may be defended on the ground that "you cannot define anything until you already understand defining" (Robinson - 1954)

Une difficulté des mathématiques est la manière « abrupte » dont les définitions s'introduisent. On ne montre pas l'origine du choix de telle convention initiale, laquelle se justifie plus ou moins par son emploi et par la suite (...) On ne dit pas d'où l'on part réellement, ni où l'on va. (Valéry, *Cahiers*)

Nous sommes dans une classe de 4ème ; le professeur dicte :

Le cercle est le lieu des points du plan qui sont à la même distance d'un point intérieur appelé centre.

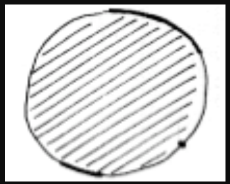
Le bon élève écrit cette phrase sur son cahier ; le mauvais élève y dessine des bonshommes ; mais ni l'un ni l'autre n'ont compris ; alors le professeur prend la craie et trace un cercle sur le tableau.

« Ah ! pensent les élèves, que ne disait-il tout de suite : un cercle c'est un rond, nous aurions compris. »

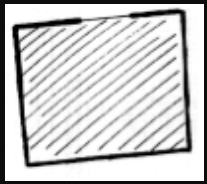
Sans doute, c'est le professeur qui a raison. La définition des élèves n'aurait rien valu, puisqu'elle n'aurait pu servir à aucune démonstration, et surtout puisqu'elle n'aurait pu leur donner la salutaire habitude d'analyser leurs conceptions. Mais il faudrait leur montrer qu'ils ne comprennent pas ce qu'ils croient comprendre (…)

(Poincaré, 1947, pp. 129-130)

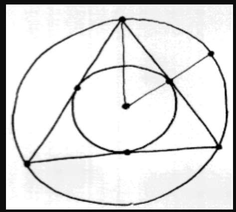
Petite visite chez des mathématiciens contemporains



Gentil convexe



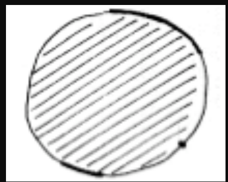
Un peu plus méchant … (pas convexe !)



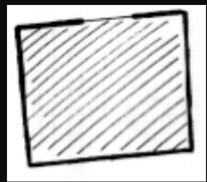
LE plus méchant des convexes

Mesurer le degré de méchanceté d'un convexe ? (Berger)

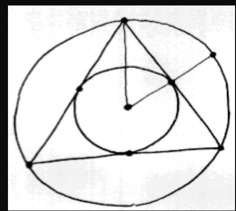
Petite visite chez des mathématiciens contemporains



Gentil convexe

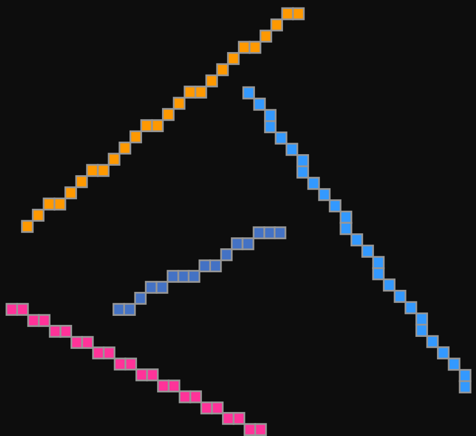


Un peu plus méchant … (pas convexe !)

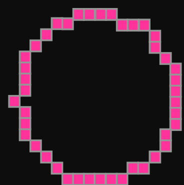


LE plus méchant des convexes

Mesurer le degré de méchanceté d’un convexe ? (Berger)



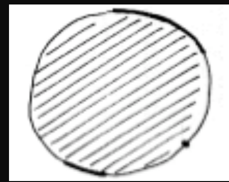
Des droites ?



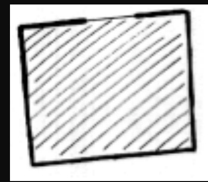
Un cercle ?

Structures périodiques, propriétés locales, propriétés géométriques, propriétés arithmétiques, programmation linéaire …
Construction d’une géométrie discrète idéale ? (Reveillès)

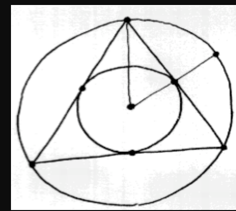
Petite visite
chez des mathématiciens
contemporains



Gentil convexe



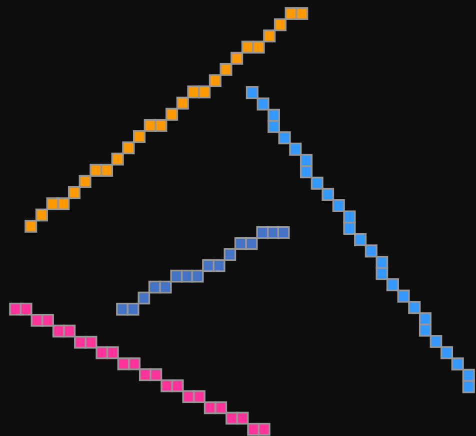
Un peu plus méchant
… (pas convexe !)



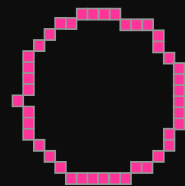
LE plus méchant
des convexes

Un début de problématique
de la définition

Générer de nouveaux problèmes
Construire de nouveaux concepts
Élaborer des théories
Appliquer



Des droites ?



Un cercle ?

Origine de la réflexion et propositions

- Travaux de Lakatos (*Preuves et réfutations, 1984*)
- Synthèse de ce que l'on trouve dans la littérature
- Exemples : ouvertures et discussion

Lakatos et *Preuves & Réfutations* (1984)

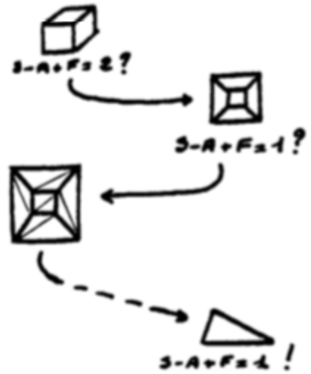
- P&R : deux études de cas dont une complète (polyèdres). Ancrage dans les travaux de Popper, Pólya notamment.
- Epistémologie de Lakatos (cf. Corfield 1997)
  - **1ère étape** : essais / erreurs naïfs → conjecture naïve (initiale) atteinte par la méthode de Popper des conjectures et réfutations, antérieure à toute preuve (Euler a testé sa formule sur des prismes variés).
  - **2ème étape** : preuve par analyse-synthèse → La conjecture naïve disparaît au profit de théorèmes *proof-generated* de plus en plus complexes, de lemmes cachés etc. La preuve-analytique comprend un cycle de conjecture, preuve, contre-exemples, réexamen de la conjecture et de la preuve (cycle perpétuel).
  - **3ème étape** : programme de recherche (dépasse P&R, cf. Kvasz 2002 et Kampis et al. 2002).
    NB : ambivalence de Lakatos par rapport à la construction axiomatique.

Lakatos et *Preuves & Réfutations* (1984)

(Balacheff, 1982, p. 5)

Conjecture naïve : S-A+F = 2
pour un polyèdre quelconque

LAKATOS part de la preuve (ou expérience de pensée), inspirée de CAUCHY (1813)[7], suivante :



1) on met le polyèdre à plat (en découpant une face), on se ramène ainsi à établir S-A+F = 1 pour un graphe planaire.

2)on triangule le graphe plan en traçant des diagonales dans les faces polygonales qui ne sont pas des triangles. Dans cette opération on ajoute, à chaque pas, à la fois une face et une arête ; donc S-A+F reste constant.

3)On enlève, un par un, les triangles du graphe triangulé à l'aide d'une des deux opérations suivantes :

. ôter un côté ;
. ôter deux côtés et un sommet.

Si S-A+F = 1 avant l'une des deux opérations, alors S-A+F = 1 après.

A la fin de cette procédure de destruction il reste un triangle pour lequel S-A+F = 1, donc la conjecture est prouvée.

Si aucun contre-exemple ne vient réfuter la conjecture, ou sa preuve, alors elle doit être acceptée comme théorème. C'est là le critère (pragmatique) de rigueur que donne LAKATOS.

Si un contre-exemple est produit, il peut être une réfutation de la conjecture ou de sa preuve. Dans le premier cas il s'agit d'un contre-exemple global, dans le second cas d'un contre-exemple local. Un contre-exemple global peut être en même temps local, c'est-à-dire réfuter un lemme (ou sous-conjecture) de la preuve ;

Méthode de P&R

- Relégation des exceptions
- Relégation des monstres pour défendre un théorème (et préciser le sens des termes pour rendre correct le théorème)
- Méthodes des P&R, 3 règles heuristiques
  - Face à une conjecture, mettre en chantier sa preuve comme sa réfutation ; recherche des contre-exemples à la conjecture (aspect global) et aux lemmes suspects (aspect local)
  - Si contre-exemple, réexamen de la preuve et recherche d'un lemme « coupable »
  - Vérifier si un contre-exemple est local ou global

  + Si contre-exemple local, améliorer la preuve analytique en remplaçant le lemme réfuté par un autre qui ne le soit pas.

Découverte mathématique ou « développement de théories mathématiques non formelles »

1. Conjecture primitive
2. Preuve (une expérience mentale grossière ou une argumentation, décomposant la conjecture primitive en sous-conjectures ou encore en lemmes).
3. Émergence d'un contre-exemple 'global' (contre-exemple à la conjecture primitive).
4. Réexamen de la preuve : le 'lemme coupable', par lequel le contre-exemple global est un contre-exemple 'local', est repéré. Ce lemme coupable peut d'abord être resté 'caché' ou avoir été mal identifié. Il est maintenant rendu explicite et incorporé sous forme de condition à la conjecture primitive. Le théorème (c'est-à-dire la conjecture améliorée) remplace la conjecture primitive et a pour nouveau caractère essentiel le concept engendré par la preuve.
5. On examine les preuves d'autres théorèmes pour voir si le lemme nouvellement trouvé ou le nouveau *proof-generated concept* y apparaissent : ce concept peut se trouver à la croisée de différentes preuves, et se révéler ainsi d'une importance fondamentale.
6. On contrôle une à une les conséquences, jusque-là acceptées, de la conjecture d'origine maintenant réfutée.
7. Les contre-exemples deviennent de nouveaux exemples – de nouveaux champs de recherche s'ouvrent.

Mais quelles sont les données initiales ?

- Un **problème** qui pose la question de la transition entre le plan et l'espace : ici le but est une **classification**.

  Existe-t-il une relation entre le nombre S de sommets, le nombre A d'arêtes et le nombre F de faces d'un polyèdres, en particulier d'un polyèdre régulier, du même type que celle, évidente, qu'il y a entre le nombre de sommets et d'arêtes d'un polygone, à savoir S=A ? Cette dernière relation nous permet de classer les polygones selon leur nombre d'arêtes (ou de sommets) : triangles, quadrilatères, pentagones etc. Une relation du même genre nous aiderait à classer les polyèdres. (Lakatos, 1984, p.7).
- **Conjecture** (émanant des élèves) dite **naïve** ou primitive : S-A+F = 2 pour un polyèdre quelconque.
- Une **conjecture alternative** peut porter sur la relation entre S, A et F pour tout polyèdre.
- **Premiers essais** : ils corroborent la conjecture qui peut être prouvée.
- Le maître propose une **preuve** (historiquement la preuve de Cauchy)
  - L'analyse de la preuve génère des sous-conjectures et lemmes à étudier.
  - La preuve est une expérience mentale, et non un exercice formel.

Mais quelles sont les données initiales ?

- Pour la continuité, seul un scénario général est donné.
- **Conjecture** : la limite d'une série convergente de fonctions continues est continue.
- Et **preuve de Cauchy** (non donnée dans P&R).
- Problème (historique): définition de la continuité. En découleront notamment les définitions de limite etc.

Des questions que cela posent

- Apports de Lakatos ?
- Quelle dialectique prouver-définir dans l'activité mathématique ?
- Quelle pertinence didactique ?
  - Types de situations ?
  - Concepts mathématiques ?
  - Profitables aux élèves ? Compétence dominante (prouver) ?

Panorama de travaux existants

- Des concepts mathématiques familiers, ou hors curricula mais accessibles
- Des situations
    - Si on fait un focus sur « définir »
        - redéfinition de concepts familiers, étude de définitions « incorrectes »
        - changement de cadre de concepts déjà connus (Paris New-York)
        - ou « à la Lakatos »
    - Si on fait un focus sur « prouver » en dialectique avec « définir »
        - changement de cadre de concepts déjà connus, redéfinition (triangle sur la sphère, groupe, limite)
        - la validation d’une (re)définition dans une activité de preuve (cf. Lakatos)
    - Pas de situation avec de nouveaux objets mathématiques ?
- Une gestion de classe non problématisée et pourtant non neutre
- Des conditions expérimentales très favorables
- Des outils théoriques décrivant souvent un seul aspect de l’activité de définition (analyses locales), mais pas de balises globales d’un processus de définition

Exemple : changement de cadre

- MATh.en.JEANS
- Définir un segment, un angle sur la sphère
- Préserver des propriétés connues

Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ?

par Sothi Mok (3°), Michel Vongsavanh (3°), Eric Chin (3°), Siek-Hor Lim (1°S), Eric Akbaraly (1°S), élèves et anciens élèves du Collège Victor Hugo (2 rue Elsa Triolet, 93160 Noisy-le-Grand)

enseignants : Mme Martine Brunstein et M. Pierre Lévy

chercheur : M. Pierre Duchet

« Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ? » Cette question qui paraît si bête est en fait le prétexte pour une réflexion sur la définition d'un carré dans une sphère. Plusieurs mois de travaux et plusieurs feuilles d'exposé pour en arriver à la conclusion qu'un carré peut ne pas posséder d'angle droit.

Compiègne
Compte-rendu du groupe 42 parrainé par le groupe 37.

Des élèves de Noisy ont complètement résolu le problème de savoir s'il existe des carrés dont les 4 sommets sont sur une sphère, connaissant deux sommets. Leur sujet se présentait donc par une question :

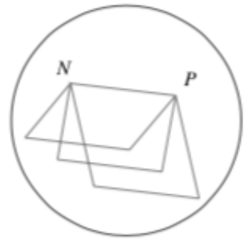
« Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ? »

Ils nous ont montré que oui en traçant, sur le globe terrestre, un "carré bossu".

Nous avons remarqué que leur exposé était bien complet et les démonstrations étaient tout-à-fait valables, mais peut-être dites un peu trop vite pour permettre la compréhension de certain spectateurs.

Voilà une curieuse question pour un sujet de recherche en mathématiques car à première vue, la réponse paraît simple. En effet, dans l'espace, nous pouvons par des plans de coupe, obtenir le support d'une infinité de carrés possédant des sommets à l'endroit où l'on veut.

En fait, tous les plans contenant la droite passant par Paris et New-York conviennent pour y tracer nos carrés : on peut imaginer un plan pivotant autour de l'axe Paris-New-York, comme sur la figure ci-dessous.

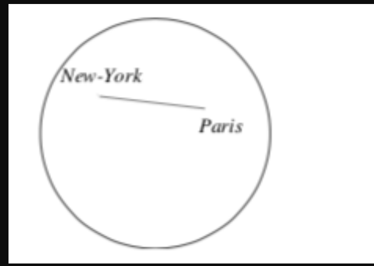


Cependant ces carrés ne sont pas sur la surface de la Terre, assimilée à une sphère parfaite.

En tentant de résoudre ce nouveau problème, c'est à une géométrie singulière que l'on doit faire face car nous n'avons jamais étudié de telles [illegible] sur une surface sphériq[illegible]

Pour construire de tels carrés, il nous a fallu définir ce qu'est un segment et un angle sur une sphère.

Exemple : changement de cadre

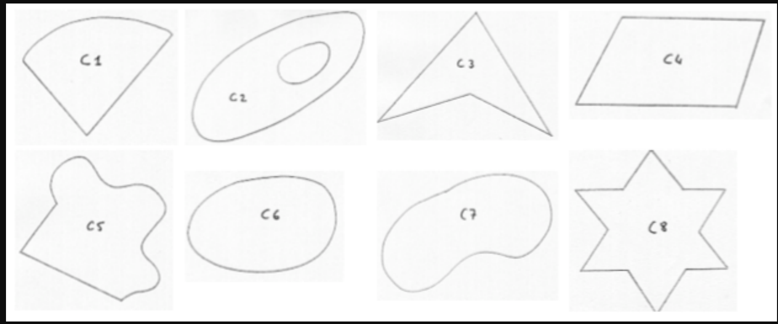


- **Recherche extrinsèque** : si la géométrie euclidienne est considérée comme un outil d'investigation avec un travail de **transposition** de définitions existantes (on cherche à conserver une axiomatique existante avec des objets connus placés dans un autre cadre)
- **Recherche intrinsèque** : si l'on construit une « autre » géométrie en cherchant de nouveaux principes applicables au nouveau cadre (on abandonne l'**axiomatique** connue au profit de la construction d'une nouvelle, locale, plus productive). Il s'agit en quelque sorte de « désinstitutionnaliser » le savoir préexistant, ce qui peut s'avérer déstabilisant.

Exemple : changement de cadre / axiomatique

- Géométrie discrète
  - Approche perceptive insuffisante
  - Approche « droite réelle » -> algorithmique mais pas seulement ☺
  - Approche axiomatique
- Approche « construction » *versus* « reconnaissance »

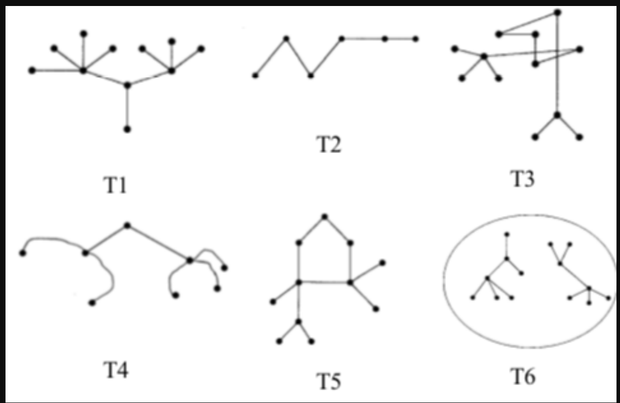
Exemple : convexité et classification



- Classer : combien de classes ?
- Définitions possibles
  - Etant donné deux points P et Q de la figure, tous les points du segment PQ appartiennent à la figure.
  - Toute droite passant par un point quelconque intérieur à la figure, coupe la frontière exactement en deux points.
  - Par chaque point de sa frontière il passe au moins une ligne de support.
    - En langage naturel : en parcourant la frontière de la figure, toute la figure est toujours du même côté (un sens de parcours étant choisi).
  - A chaque point P extérieur correspond un point et un seul de la figure qui soit le plus proche de P.
  - Tous les angles sont saillants.
- Pas mal de concepts à définir en fait (frontière, angle…).

Exemple : graphes et arbres

- L'arbre, un objet « riches » en définition
- Soit G un graphe connexe.
  Démontrer qu'il existe un arbre couvrant tous les sommets.



Définitions	Nature principale des définitions
Def1- G est connexe sans cycle.	Perceptive, structurelle
Def2- entre deux sommets quelconques de G, il existe un unique chemin .	Perceptive, cheminement
Def3- G (à n sommets) est sans cycle avec (n-1) arêtes	Combinatoire
Def4- G (à n sommets) est connexe avec (n-1) arêtes	Combinatoire
Def5- G est sans cycle et en ajoutant une arête, on crée un cycle (graphe sans cycle maximal)	Dynamique (nécessite une action sur l'objet), optimal
Def6 - G est connexe, et si on supprime une arête quelconque, il n'est plus connexe (connexe minimal)	Dynamique
Def7 - un arbre est soit un sommet isolé, soit un arbre auquel on ajoute un sommet pendant .	Inductive (ascendante), dynamique constructive
Def8- G est soit un sommet isolé, soit un graphe A, qui, privé d'un sommet pendant quelconque est soit un arbre, soit un sommet isolé.	Inductive (descendante), dynamique constructive
Def9- un arbre est soit un sommet isolé, soit deux arbres reliés par une arête.	Inductive, dynamique
Def10- un arbre est soit un sommet isolé, soit le graphe obtenu à partir d'une forêt en reliant un nouveau sommet à un sommet de chacun des arbres de la forêt.	Inductive, dynamique

Définir, prouver : une dialectique ?

- Tentative d'explicitation de l'activité mathématique

Conception lakatosienne

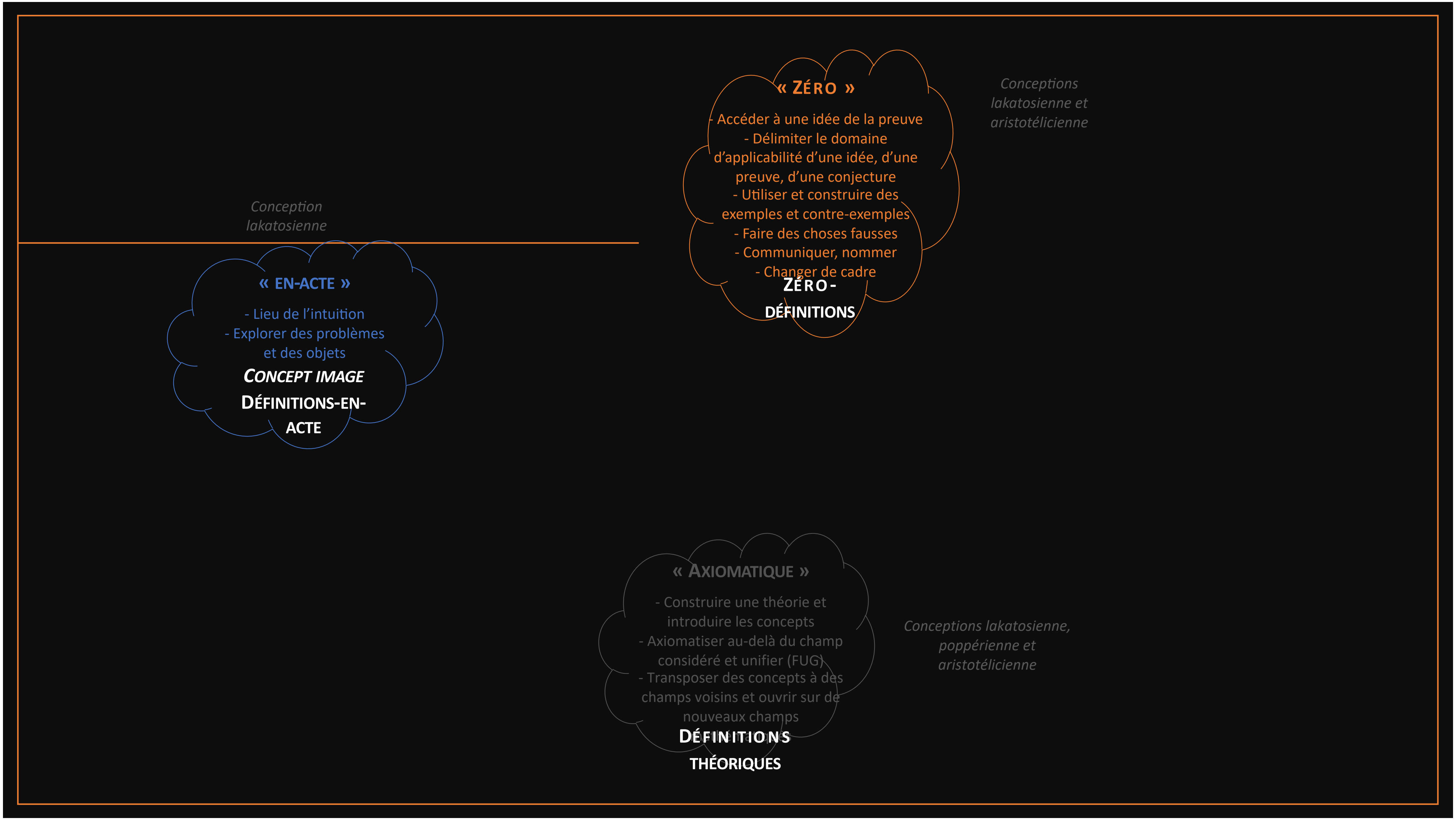
« EN-ACTE »

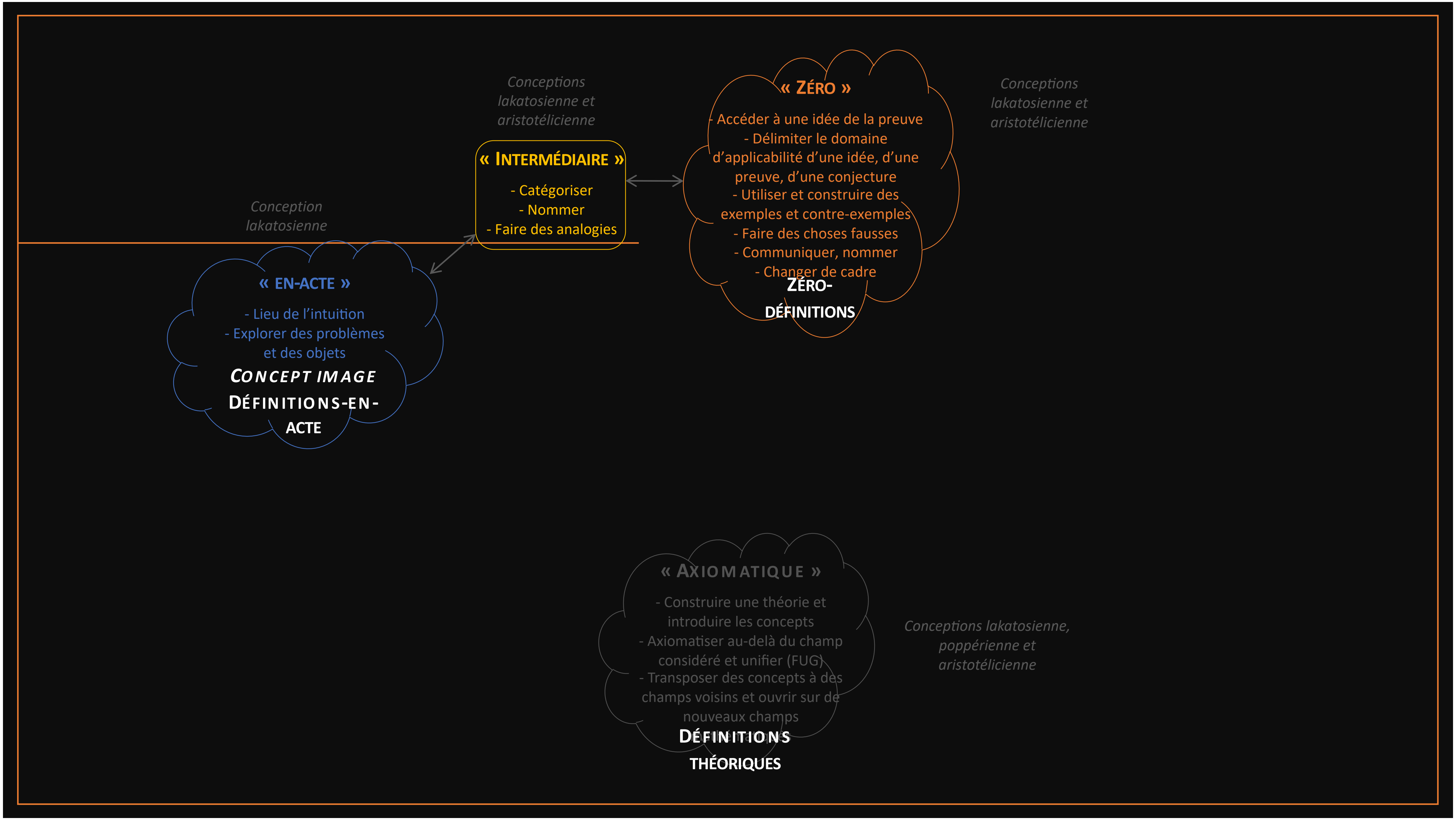
- Lieu de l'intuition
- Explorer des problèmes et des objets

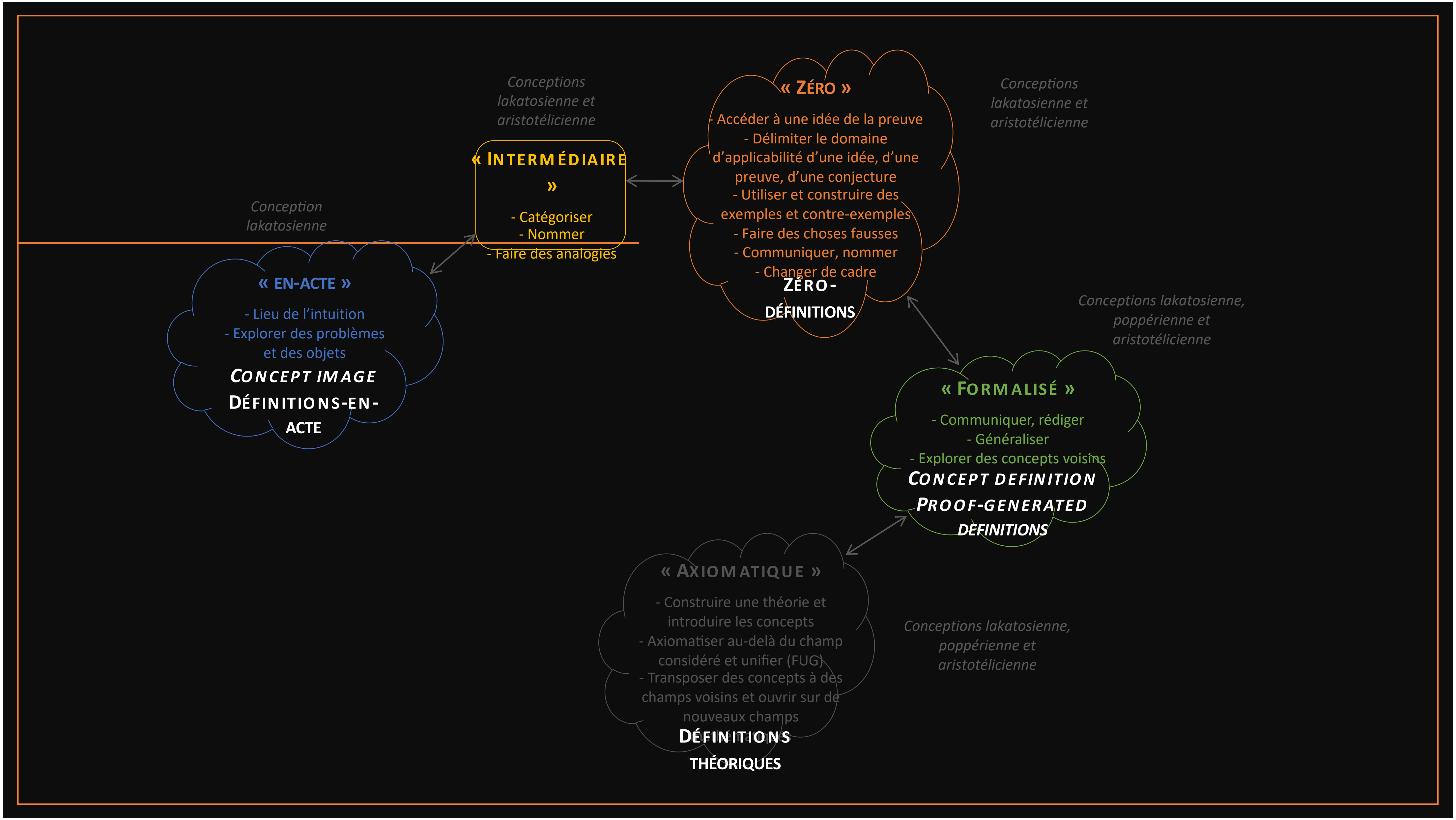
CONCEPT IMAGE

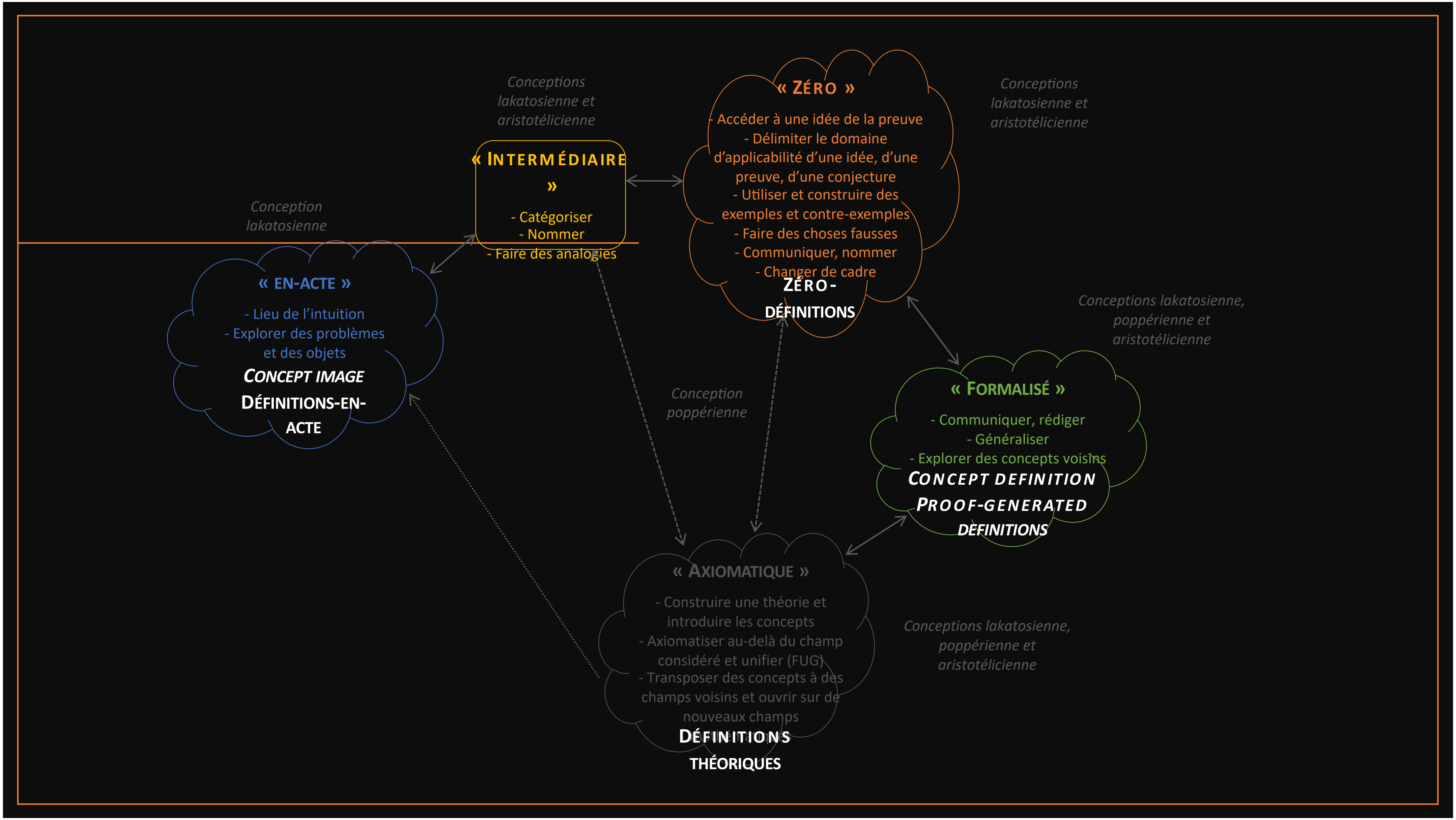
DÉFINITIONS-EN-ACTE


Conception lakatosienne
« EN-ACTE »
- Lieu de l’intuition
- Explorer des problèmes et des objets
CONCEPT IMAGE
DÉFINITIONS-EN-ACTE
« AXIOMATIQUE »
- Construire une théorie et introduire les concepts
- Axiomatiser au-delà du champ considéré et unifier (FUG)
- Transposer des concepts à des champs voisins et ouvrir sur de nouveaux champs
DÉFINITIONS THÉORIQUES
Conceptions lakatosienne, poppérienne et aristotélicienne


Conception
lakatosienne
« EN-ACTE »
- Lieu de l'intuition
- Explorer des problèmes
et des objets
CONCEPT IMAGE
DÉFINITIONS-EN-ACTE
« ZÉRO »
- Accéder à une idée de la preuve
- Délimiter le domaine
d'applicabilité d'une idée, d'une
preuve, d'une conjecture
- Utiliser et construire des
exemples et contre-exemples
- Faire des choses fausses
- Communiquer, nommer
- Changer de cadre
ZÉRO-DÉFINITIONS
Conceptions
lakatosienne et
aristotélicienne
« AXIOMATIQUE »
- Construire une théorie et
introduire les concepts
- Axiomatiser au-delà du champ
considéré et unifier (FUG)
- Transposer des concepts à des
champs voisins et ouvrir sur de
nouveaux champs
DÉFINITIONS
THÉORIQUES
Conceptions lakatosienne,
poppérienne et
aristotélicienne


Conceptions lakatosienne et aristotélicienne
« INTERMÉDIAIRE »
- Catégoriser
- Nommer
- Faire des analogies
« ZÉRO »
- Accéder à une idée de la preuve
- Délimiter le domaine d'applicabilité d'une idée, d'une preuve, d'une conjecture
- Utiliser et construire des exemples et contre-exemples
- Faire des choses fausses
- Communiquer, nommer
- Changer de cadre
ZÉRO-DÉFINITIONS
Conceptions lakatosienne et aristotélicienne
Conception lakatosienne
« EN-ACTE »
- Lieu de l'intuition
- Explorer des problèmes et des objets
CONCEPT IMAGE
DÉFINITIONS-EN-ACTE
« AXIOMATIQUE »
- Construire une théorie et introduire les concepts
- Axiomatiser au-delà du champ considéré et unifier (FUG)
- Transposer des concepts à des champs voisins et ouvrir sur de nouveaux champs
DÉFINITIONS THÉORIQUES
Conceptions lakatosienne, poppérienne et aristotélicienne


Conceptions lakatosienne et aristotélicienne
« Intermédiaire »
- Catégoriser
- Nommer
- Faire des analogies
« Zéro »
- Accéder à une idée de la preuve
- Délimiter le domaine d'applicabilité d'une idée, d'une preuve, d'une conjecture
- Utiliser et construire des exemples et contre-exemples
- Faire des choses fausses
- Communiquer, nommer
- Changer de cadre
Zéro-définitions
Conceptions lakatosienne et aristotélicienne
Conception lakatosienne
« En-acte »
- Lieu de l'intuition
- Explorer des problèmes et des objets
Concept image
Définitions-en-acte
Conceptions lakatosienne, poppérienne et aristotélicienne
« Formalisé »
- Communiquer, rédiger
- Généraliser
- Explorer des concepts voisins
Concept definition
Proof-generated definitions
« Axiomatique »
- Construire une théorie et introduire les concepts
- Axiomatiser au-delà du champ considéré et unifier (FUG)
- Transposer des concepts à des champs voisins et ouvrir sur de nouveaux champs
Définitions théoriques
Conceptions lakatosienne, poppérienne et aristotélicienne


Conceptions lakatosienne et aristotélicienne
« Intermédiaire »
- Catégoriser
- Nommer
- Faire des analogies
« Zéro »
- Accéder à une idée de la preuve
- Délimiter le domaine d'applicabilité d'une idée, d'une preuve, d'une conjecture
- Utiliser et construire des exemples et contre-exemples
- Faire des choses fausses
- Communiquer, nommer
- Changer de cadre
Zéro-définitions
Conceptions lakatosienne et aristotélicienne
Conception lakatosienne
« En-acte »
- Lieu de l'intuition
- Explorer des problèmes et des objets
Concept image
Définitions-en-acte
Conceptions lakatosienne, poppérienne et aristotélicienne
Conception poppérienne
« Formalisé »
- Communiquer, rédiger
- Généraliser
- Explorer des concepts voisins
Concept definition
Proof-generated definitions
« Axiomatique »
- Construire une théorie et introduire les concepts
- Axiomatiser au-delà du champ considéré et unifier (FUG)
- Transposer des concepts à des champs voisins et ouvrir sur de nouveaux champs
Définitions théoriques
Conceptions lakatosienne, poppérienne et aristotélicienne

Discussions

- Une activité dialectique en mathématiques
- Transposition à la classe ?
- Leviers à la disposition de l'enseignant ?
- Quel rapport aux mathématiques ?
- Statut des énoncés mathématiques ?
- Une compétence à travailler spécifiquement ?

Merci
de votre attention !