Une ingénierie visant la formulation d'une définition de la limite d'une suite en Terminale.

Sylvie Alory (Lycée La Fontaine, 75016 Paris – IREM de Paris)

Renaud Chorlay (INSPE de l'académie de Paris – Laboratoire de Didactique André Revuz)

Vincent Josse (Lycée La Fontaine, 75016 Paris)

XXVII^{e} Colloque CORFEM

CORFEM

LDAR

LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ

Jeudi 10 et vendredi 11 Juin 2021 – Université de Strasbourg

Plan de l’exposé – atelier

I. Les paramètres

a. Les programmes
b. Des difficultés nombreuses, bien documentées et stables
c. 40 ans d’ingénieries et d’expériences
d. Nos choix

II. Analyse de données de terrains

a. Phase 1 : tri de suites
b. Phase 2 : formulation de candidats définitions
c. Phase 3 : évaluation / amélioration des candidats
trajectoire de la classe, maintien d’une dimension adidactique
d. Quelle(s) trace(s) 6 mois plus tard ?

Chorlay, R. (2019). *A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition*. IJRUME (International Journal for Research in UndergraduateMathematics Education) 5(3), 267-314.

Les programmes en vigueur au moment de l'expérience (2016-17 et 2017-18)

Terminale S

La notion de limite de suite fait l'objet d'une étude approfondie. On prépare ainsi la présentation des limites de fonctions.

Limite finie ou infinie d'une suite.	◇ Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.	Pour exprimer que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ».

Limites et comparaison.	▣ Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : - u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; - u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.	▣ On démontre que si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l. Le théorème dit « des gendarmes » est admis.
Suite majorée, minorée, bornée.	• Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.	Ce théorème est admis. ▣ Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ▣. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues.

Les programmes actuels – Spécialité Mathématiques en Terminale

La notion de limite est présentée de manière intuitive, en s'appuyant notamment sur la vision géométrique et sur l'écriture décimale. On explicite ensuite les définitions mais la maîtrise complète du formalisme n'est pas un attendu.

Lors de l'étude d'une suite, on distingue les aspects globaux des aspects asymptotiques. Les élèves doivent disposer d'un répertoire d'exemples suffisamment riche pour éviter les confusions entre propriétés.

Contenus

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.
- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Démonstrations

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Limite de (q^n), après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.
- Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

Des difficultés nombreuses, bien documentées, stables

Pour les suites convergentes (vers un réel L)

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_M \Longrightarrow \mathrm{L} - \varepsilon \leq u_n \leq \mathrm{L} + \varepsilon$$

- De modèles primitifs qui peuvent faire obstacle à la compréhension de la définition :
  - Modèles dynamiques / temporels / causaux non reflétés par la définition
  - Modèles *x-first* non-congruents à la définition *y-first*

- Les difficultés usuelles sur les quantificateurs enchâssés et sur l'implication

- Des croyances erronées :
  - Réduction monotone grossière
  - Réduction monotone de la distance à la limite
  - Limite non-atteinte (valeur seuil, valeur interdite)

Des difficultés nombreuses, bien documentées, stables

Pour les suites tendant vers +∞ :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_M \Longrightarrow u_n \geq \mathrm{A}$$

Quelques copies de L1 sciences (Université de Paris, janvier 2018)

Copie n°1 :

n°2 Si une suite tend vers plus l'infini, alors elle est croissante (au moins à partir d'un certain rang)

Vrai / Faux Entourer votre choix	Justification : contre-exemple : la suite (U) tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = n + \sin(n)$ tend vers $+\infty$ mais n'est ~~jamais~~ pas croissante au partir d'un certain rang

n°3 Si une suite est strictement croissante, alors elle tend vers $+\infty$

Vrai / Faux Entourer votre choix	Justification : contre exemple la suite (U) tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = -\frac{1}{n}$ est strictement croissante mais tend vers 0

n°4 Si $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_A \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_A} > A$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Vrai / Faux	Justification : c'est ~~que~~ la définition d'une suite qui tend vers l'infini

n°5 Si $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors la suite ne comprend qu'un nombre fini (peut-être nul) de termes négatifs.

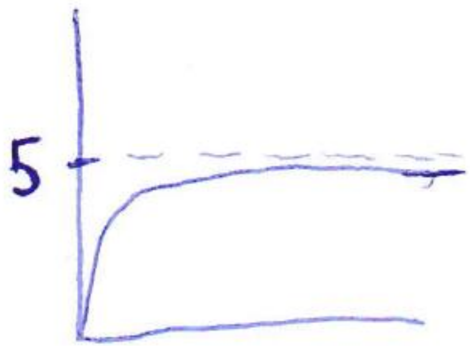
Vrai / Faux Entourer votre choix	Justification : par définition $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ signifie que $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists n_0\ \cancel{\forall} \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\quad n \geqslant n_0 \Rightarrow U_{n_0} \geqslant A$ or si on choisi 0 comme valeur de A on a : $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\quad n \geq n_0 \Rightarrow U_{n_0} \geq 0$ donc il existe un nombre fini de terme négatif ~~de égal~~ ~~un~~ car a partir d'un n_0 fini tout les ~~nombres~~ termes sont positif

Copie n°2

n°2 Si une suite tend vers plus l'infini, alors elle est croissante (au moins à partir d'un certain rang)

Vrai / Faux	Justification : D'après la définition de la convergence vers +l'infini.

n°3 Si une suite est strictement croissante, alors elle tend vers $+\infty$

Vrai / Faux Entourer votre choix	Justification : 

n°4 Si $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_A \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_A} > A$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Vrai / Faux	Justification : D'après ~~le théorème~~ la définition des croissance comparer.

n°5 Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors la suite ne comprend qu'un nombre fini (peut-être nul) de termes négatifs.

Vrai / Faux	Justification : D'après ~~la~~ définit° de la continuité.

Pour les suites tendant vers +∞ :

Quelques copies de L1 sciences (M1 MEEF maths, février 2018)

Copie n°1 :

Vrai / Faux ? Justifiez !

Affirmation A : Si une suite est strictement croissante, alors elle tend vers $+\infty$.

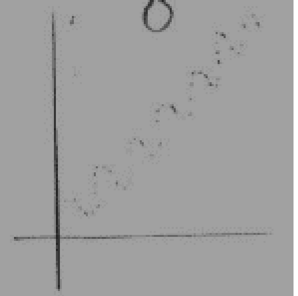
Affirmation B : Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.

Affirmation C :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_A \in \mathbb{N} \quad u_{n_A} \geq A \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Affirmation A : Faux, contre exemple $U_n = -\frac{1}{n}$, U_n est strictement croissante et tend vers 0

Affirmation B : Faux, contre exemple : une suite qui serait comme cela :



Affirmation C : Vrai,

Pour les suites tendant vers +∞ :

Quelques copies de L1 sciences (M1 MEEF maths, février 2018)

Copie n°2 :

Vrai / Faux ? Justifiez !

Affirmation A : Si une suite est strictement croissante, alors elle tend vers $+\infty$.

Affirmation B : Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.

Affirmation C :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_A \in \mathbb{N},\ u_{n_A} \geq A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Affirmation A : Faux $U_n = -\frac{1}{n}$ $\quad U_n = \arctan(n)$

Affirmation B : Vraie : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_A \in \mathbb{N}\quad U_{n_A} \geq A$

Affirmation C : Faux

Pour les suites tendant vers +∞ :

Quelques copies de L1 sciences (M1 MEEF maths, février 2018)

Copie n°3 :

Affirmation B : Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.

affirmation B : Vrai Supposons par l'absurde qu'elle ~~[illegible]~~ ne soit pas croissante à partir d'un certain rang donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $u_{n_0} < u_n$

or $\forall A \in \mathbb{R}$ $\exists N_0$ tq $\forall n \geq N_0$ $u_n > A$

et pour ~~n~~ $n \in \mathbb{N}$ fixé et en posant $A = u_{n_0}$ on a contradiction

Affirmation B Faux : contre exemple

$$u_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$$

qui n'est pas strictement croissante

mais dont la limite est $+\infty$

Affirmation C :

$$\forall A \in \mathbb{R}\ ,\ \exists n_A \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n_A} \geq A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Affirmation C Faux : contre exemple

$u_n = (-1)^n\, n$ qui n'a pas de limite et

pourtant pour tout $A \in \mathbb{R}$

$u_{2E(A)} \geqslant A$ ($u_{2E(A)} = 2E(A)$

si $A \geqslant 0$ et $u_2 = 2$ si $A < 0$

Des difficultés nombreuses, bien documentées, stables

Pour les suites tendant vers $+\infty$

Une proximité conceptuelle trompeuse entre 3 notions :

(1) Tendre vers $+\infty$
(2) Ne pas être majorée
(3) Être croissante (strictement / au sens large, toujours / à partir d'un certain rang)

40 ans d'ingénieries et d'expériences

Dispositifs « expérimentaux » :

- Cottrill& Dubinsky : limite de fonction en 1 point. Semestre expérimental, L1.
- Swinyard : limite de fonction en $+\infty$ et en 1 point. 2 étudiants, 10 séances d'1h30.
- P. Job : suites convergentes. Double objectif : formulation de définition / modification du rapport aux définitions. Niveau Terminale.
- Przenioslo (projet) : suites convergentes, niveau Terminale.
- Thomas Lecorre : Niveau Terminale.

Dispositifs en « conditions ordinaires » :

- Robert : suites convergentes. Niveau Term./ L1
- Bloch : suite convergente et suite tendant vers $+\infty$ (flocon de von Koch). Niveau lycée.
- Roh& Lee : suites convergentes. Niveau L1

Nos choix d’ingénierie

Objectifs :

- Faire émerger le besoin d’une définition
- Faire formuler et valider une définition correcte (situation de formulation et de décision)
- Situation « réelle » et (potentiellement) reproductible : 2h en classe entière, dans le cadre du programme.

Objectif ET moyen : prendre conscience des liens précis entre 3 notions distinctes

(1) Tendre vers $+\infty$
(2) Ne pas être majorée
(3) Être croissante (strictement / au sens large, toujours / à partir d’un certain rang)

Sur le plan théorique : différenciation conceptuelle *vs* F.U.G.

Pré-requis

Sur les suites:

- En appui sur le travail de Première: Familiarité avec la notion de "tendre vers" pour une suite; outils de conjecture graphiques ou calculatoires.
- Chapitre de Terminale sur les suites (sans limites) déjà fait.

Logique :

- $\forall$ et $\exists$ isolés
- Quantificateurs enchâssés rencontrés dans :
  - Suite majorée, suite minorée
  - Suite non majorée : $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad u_{n_M} \geq M$
- Conditions nécessaires / conditions suffisantes

Contexte: (1) expérience de séances "ouvertes" ou "recherche", (2) dans le chapitre de géométrie, attention portée à l'importance des définitions.

Vue d'ensemble de l'ingénierie

- Phase 1 (45 min, en binômes) :

  Distribution d'un « herbier » de suites aux propriétés diverses.

  Tâche de tri (sans justifications) : tend ou pas vers $+\infty$?

  Objectifs de la phase 1 :

  - Faire reconnaître la nécessité (au moins : l'utilité) d'une définition (au moins : d'une convention explicite) pour lever l'incertitude sur les suites ayant « plusieurs limites »
  - Expliciter un « cahier des charges » quant à la définition-à-venir, en termes de propriétés attendues ; en particulier les liens entre les propriétés (1) (2) et (3)
  - Fournir un milieu comprenant des exemples et des non-exemples de suites tendant vers $+\infty$, permettant d'invalider des candidats-définitions en phase 3

- Phase 2 (5 min, en binômes) : Demande de rédaction de candidats-définitions

Phase 3 (55 min, cours dialogué) : Validation / invalidation collective de candidats-définitions proposés par les élèves en phase 2

- Si une définition correcte émerge et est validée par le groupe : institutionnalisation.

- Sinon : *focus* imposé par l’enseignant sur la définition <u>formelle</u> de « non majorée » (qui entretient un lien important avec la définition-cherchée : c’est une condition nécessaire, et qui engage un point de vue *y-first*), que l’on va chercher à renforcer (pour obtenir une condition nécessaire et suffisante). Il y a donc redéfinition de la tâche (par précision) et imposition d’un registre de travail (formel, quantifié), à partir d’une notion choisie comme pivot :
  « non majoré », i.e. $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad u_{n_M} \geq \mathrm{A}$

  Relance de la phase : production / évaluation de candidats définitions

  - Si une définition correcte émerge et est validée par le groupe : institutionnalisation.
  - Sinon : définition donnée par l’enseignant.

Plan de l’exposé – atelier

I. Les paramètres

a. Les programmes
b. Des difficultés nombreuses, bien documentées et stables
c. 40 ans d’ingénieries et d’expériences
d. Nos choix

II. Analyse de données de terrains

a. Phase 1 : tri de suites
b. Phase 2 : formulation de candidats définitions
c. Phase 3 : évaluation / amélioration des candidats
trajectoire de la classe, maintien d’une dimension adidactique
d. Quelle(s) trace(s) 6 mois plus tard ?

Phase 1

Parmi les suites définies ci-dessous, quelles sont celles dont vous diriez qu'elles tendent vers $+\infty$?

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n = \frac{n}{100} - 1000 \qquad b_n = 10000 - 1000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n \qquad c_n = \sqrt{\sqrt{n}}$$

$$d_n = (-1)^n \times n \qquad e_n = 10 \times (-1)^n + n \qquad f_n = \left((-1)^n + 1\right) \times n$$

$$g_n = \left((-1)^n + 2\right) \times n \qquad h_n = 1000n - \frac{n^2}{1000} \qquad i_n = \left|\frac{1000}{\cos(n)}\right|$$

Rangez ces suites dans le tableau suivant ; lorsque vous rangez une suite dans la colonne du milieu, notez la raison pour laquelle vous le faites.

Je pense que la suite tend vers $+\infty$	Je ne sais pas	Je pense que la suite ne tend pas vers $+\infty$

Phase 1

Parmi les suites définies ci-dessous, quelles sont celles dont vous diriez qu'elles tendent vers $+\infty$?

Pour tout entier naturel n, on pose :

$a_n = \frac{n}{100} - 1000$

$\boxed{b_n = 10000 - 1000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n}$

$c_n = \sqrt{\sqrt{n}}$

$\boxed{d_n = (-1)^n \times n}$

$\boxed{e_n = 10 \times (-1)^n + n}$

$\boxed{f_n = \left((-1)^n + 1\right) \times n}$

$\boxed{g_n = \left((-1)^n + 2\right) \times n}$

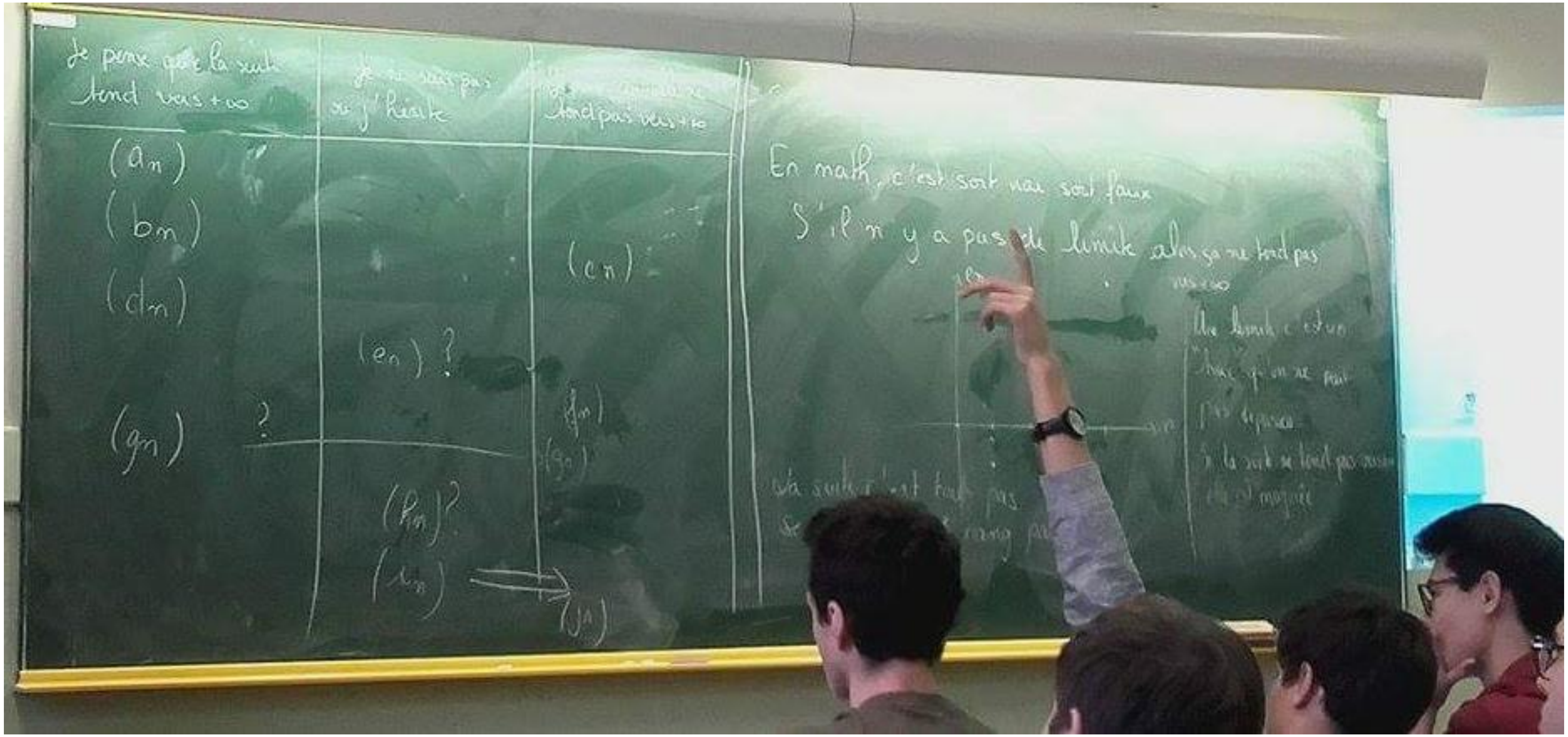
$h_n = 1000n - \frac{n^2}{1000}$

$i_n = \left|\frac{1000}{\cos(n)}\right|$

Rangez ces suites dans le tableau suivant ; lorsque vous rangez une suite dans la colonne du milieu, notez la raison pour laquelle vous le faites.

Je pense que la suite tend vers $+\infty$	Je ne sais pas	Je pense que la suite ne tend pas vers $+\infty$

Phase 1


Je pense que la suite tend vers +∞
(a_n)
(b_n)
(d_n)
(c_n)
(e_n) ?
(g_n)
En math, c'est soit vrai soit faux
S'il n'y a pas de limite alors ça ne tend pas vers +∞

Phase 1

Bilan sommaire :

- Bon engagement des élèves dans les tâches (recherche en binôme, débat dans la classe)

- Dissensus robuste sur le cas des suites à « plusieurs limites »

- Formulation *par les élèves* du besoin d'une définition pour lever l'incertitude ?

  →résultats incertains :

  + reconnaissance d'une lacune dans les connaissances de la classe quant à la notion de limite infinie, et du besoin d'un critère de tri

  –demande de définition, ou demande de convention, ou demande de précision de la questions (« Quelles suites tendent *seulement* vers $+\infty$? »).

Transition avec la phase 2

Nouvel élément inséré dans le milieu :

« Les mathématiciens ont choisi une définition garantissant l'unicité de la limite. Donc la définition cherchée doit être telle que

$$d_n = (-1)^n \times n \quad \textit{ou} \quad f_n = \left((-1)^n + 1\right) \times n$$

soient des non-exemples de suites tendant vers $+\infty$.

Par contre, $e_n = 10 \times (-1)^n + n$ *et* $g_n = \left((-1)^n + 2\right) \times n$ *sont des exemples. »*

Phase 2

① Tendre vers $+\infty$, c'est que pour toutes grandes valeurs de n, on obtient un grand résultat, sans forcément que la suite soit croissante.

②
- $\forall n \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$
- Si $U_{n+1} < U_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n \neq +\infty$
- Si U_n n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

③ Une suite (U_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que $U_n < U_{n+i}$

④ On peut dire d'une suite qu'elle tend vers $+\infty$ ssi :
- elle n'est pas majorée et qu'elle est croissante

⑤ Pour dire qu'une suite tend vers $+\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n < u_{n+1}$.
De plus $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > A$.

Phase 2

(6) Une suite (a_n) tend vers $+\infty$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, (a_n) n'est pas majorée et une autre condition.
Une condition telle que la suite, (a_n) (~~telle que~~) quelquesoit ses variations, si puis dans son ensemble, sont croissantes et n'admettent qu'une limite unique, $+\infty$.

(7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, une suite tend vers $+\infty$ si et seulement si elle n'est pas strictement décroissante et non majorée.
Et sur de très grandes valeurs, les variations sont négligeables.

(8) Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite tel que sa limite est notée ℓ.
* Si $\nexists x \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}$ $x \geq u_n$ ie $(u_n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
* Si (u_n) est strictement croissante ou encadrée par ~~[illegible]~~ a et b / $\forall n \in \mathbb{N}$ $a \leq u_n \leq b$ et que la limite de a est de b est égale à $+\infty$ ou si $\exists c$ [illegible] / $\forall n \in \mathbb{N}$ $c \leq u_n$ et que la limite de c soit $+\infty$.
Alors $\ell = +\infty$.

Phase 3

Codage des actions :

- O : Opérateur (action sur le milieu)
- C : Contrôle (évaluation de l'état du milieu relativement à l'objectif, choix d'un opérateur adapté à l'état du milieu relativement à l'objectif)

Non souligné : action menée par un.e élève

<u>Souligné</u> : <u>action de l'enseignant.e</u>

HO, HC : action évoquée mais pas réalisée.

Ens. : alors, on y va … (…) on fait des maths. On se concentre à nouveau. Alors Angèle, qu'est-ce que tu penses de la première proposition « pour qu'une suite tende vers +oo il faut que pour tout n u(n+1) soit supérieur à u(n) »	
Angèle : j'pense que c'est faux parce qu'une suite elle peut être décroissante puis croissante	C:Repère qu'une condition est trop stricte / non nécessaire. Cette élève avait déjà proposé dans la phase 1 d'introduire l'idée de suite : croissante vers la fin / croissante à partir d'un certain rang.

Ens. : (…) Est-ce qu'il y en a d'autres qui ont d'autres arguments – il faudrait peut-être noter les arguments, pour évacuer les définitions qui ne vous plaisent pas - … Mattias *Mattias : si on regarde f_n, on peut voir que la suite elle est croissante, et elle tend vers 10000* *Ens. : oui, si on prend les suites qui sont dans l'herbier, elles peuvent servir de … de quoi ?* *Mattias : d'exemple* *Ens. : contre-exemple.*	C:Repère qu'un non-exemple de l'herbier permet de rejet le candidat-définition. O:Rejet du candidat-définition.

Ens. : d'accord, OK. Alors, du coup, la 3, qu'est-ce que vous en pensez ? là je peux effacer ça … Alors, la 3 c'est : « la suite tend vers +oo quand elle n'est pas majorée ». Rémi *Rémi : ça a l'air pas mal parce que … c'est une condition nécessaire et suffisante.* *Ens. : alors, d'abord, est-ce que la phrase c'est une condition nécessaire et suffisante qui est écrite ? … c'est pas très clair ; le « quand » en mathématiques … qui est l'auteur de cette phrase … c'est Rémi ! Rémi, ce « quand » qu'est-ce que tu voulais dire ?* *Rémi : je voulais dire « si »* *Ens. : alors, tu voulais dire – du coup on va l'écrire : « si u(n) n'est pas majorée, alors elle tend vers +oo ». Alors, maintenant qu'elle est écrite de façon à ce qu'on comprenne tout … quelle est la condition suffisante ; du coup qu'est-ce que vous en pensez ? Isabelle*	C:Examine la forme logique de la phrase, et reconnaît la forme attendue (la définition passe par une condition nécessaire et suffisante). C:Repère une formulation imprécise. HO:Demande une reformulation. O:Explicite un connecteur logique.

Isabelle : on a vu dans le cas d'une suite que ça faisait [geste décrivant $(-1)^n \times n$] *… d'un côté ça tend vers l'infini, de l'autre aussi vers –oo* *Ens. : c'était e_n je crois, dans la liste* *Isabelle : elle était pas majorée mais elle tendait pas forcément vers +oo, parce qu'elle était pas non plus minorée.* *Ens. : alors, il faudrait qu'elle soit minorée pour tendre vers $+\infty$* *Isabelle : je pense*	C : Repère que le candidat-définition est compatible avec un non-exemple. C:Repère une propriété du non-exemple (suite non-minorée). <u>O:Modifie le candidat définition en insérant la clause « et non minorée »</u>. Remarque: une tactique du même type (*monster-barring*) a été aussi observée dans les 3 autres expérimentations.

Ens. : Alors, du coup, il y a un groupe retardataire qui propose une autre définition ; on va l'appeler 6. Alors, il y a écrit ça sur la feuille [copie au tableau]*Alors …*	

*Paul, qu'est-ce que vous en pensez de la proposition 6 : « quel que soit …(tout le monde arrive à l'écrire la phrase, comme l'on écrite Maxendre et Georges ?) pour tout r appartenant à **R** il existe n appartenant à **N** tel que u(n) est plus grand, strictement, que r »* [écrit au tableau :] $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad u_n > M$ *Ens. : Alors, qu'est-ce que ça veut dire ça pour la suite ? … que la suite n'est pas majorée. D'accord, Maxendre et Georges ? On avait dit que c'était … qu'on allait le retenir parce que c'était une condition … [les élèves : nécessaire] nécessaire, mais pas suffisante, d'accord ? Donc ça c'est en fait « u(n) non majorée ». Est-ce que l'idée que ce ne soit pas majoré c'est une idée importante pour dire que ça tend vers +∞ ? Est-ce qu'on le garde ? … on a dit que, si c'est*	O:Introduction d'un nouveau candidat-définition. O:Passage au registre formel. HO:Demande de renforcement de la

pas une condition suffisante, ça veut dire qu'il faut quoi ? … il en faut une autre, il faut qu'on en rajoute une autre, d'accord ?[Un étudiant propose d'ajouter "et minorée", explicitement pour éliminer$(-1)^n \times n$]	<u>condition.</u> O: Ajoutd'une condition. *Monster-barring*.

[L'enseignante reformule “non majoré” et souligne le fait que ça ne garantit pas plus que l'existence, pour chaque *M*, de <u>un</u> rang *n* pour lequel$u_n > M$. Elle dessine un repère et place un nuage de point de type « suite », deux horizontales de côtes *M* et *M'*, illustrant sur le schéma le sens de cette existence. Au-delà d'un tel rang *n*, rien n'est imposé à la suite.	O:Passage au registre graphique. Instanciation générique. HO:Demande de renforcement de la condition.

Ens. : à rester au-dessus. Donc qu'est-ce qu'il faut changer dans cette phrase ? *Elève 1 : monotone ?* *Elève 2 : strictement croissante* *Ens. : non, on a dit que la monotonie, ce n'était pas une condition pour notre définition. Comment est-ce que vous pouvez le traduire : « il faut qu'elle reste au-dessus » ? Allez, je suis sûr que tout le monde peut le faire. … Maxime* *Maxime : u(n+1) supérieur à M* *Ens. : alors attend, écris-moi une phrase complète s'il te plaît*. [sous la dictée] *« pour tout M appartenant à* ***R****, (…) » alors on va l'appeler n indice M pour dire qu'il dépend, parce qu'à chaque fois que je choisis un M, c'est pas forcément le même, on est d'accord ?* [élève : oui] *donc « il existe un indice, un rang … »* [sous la dictée] *« u(n) supérieur à M, et* $u(n_M+1)$ *supérieur à M ».*	 O:Ajout de conditions. O : « Cliquet » : pas de retour en arrière sur un point déjà tranché. HO:Demande de reformulation dans le registre formel. O : Ajout d'une condition, utilisant les possibilités offertes par le registre formel.

Ens. : alors, qu'est-ce que vous en pensez ? [silence] … *faites des dessins, faites des dessins… tu voulais l'empêcher de redescendre, hein ?*	<u>O: demande d'explicitation</u>
Maxime : mais oui, mais ça veut dire qu'après u(n+1) ça devient u(n) et, le u(n+1) suivant ça sera toujours supérieur…	O:Explicitation rhétorique du sens visé par la tentative dans le register formel. Remarque: des tentatives pour exprimer le « pour tous … les termes après … » en s'inspirant de la rédaction d'une argument par récurrence a été observé dans d'autres études. (Martin, Oehrtman and Swinyard 2014, 138).
Ens. : alors, tu es d'accord que comme ça ça va pas, parce que là y'en a qu'un … est-ce que vous voyez ce que veux faire Maxime ?	<u>C:La condition est trop faible.</u>
Maxime : (…) u(n+x)	O:Utilisation des ressources du registre formel pour reformuler. Le sens visé (les termes « au-delà » ou « plus grands » que *n* sont décrits par une relation additive « *n+x* »).

[A la suite d'un échange avec une élève sur le sens du +*x* de Maxime] *Ens. : alors, bonne question, très bien* *Angèle : ça phrase elle n'est pas assez précise. Est-ce que tu voulais dire – comme je l'ai écrit, effectivement, elle a raison – elle dit : est-ce que tu voulais dire « il y a un u(x) pour lequel ça reste aussi plus grand » …* *Maxime : n'importe* *Ens. : ah, donc, du coup « pour tout x appartenant à* ***N*** *», est-ce que ça ça te convient ?*	C: Variable non quantifiée <u>HO : Demande de quantification sur</u>*x*. <u>O:Introduction d'un quantificateur existenciel.</u>

Fichier audio : 2ème heure, 48'10'' – 48'50''

On part de $\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_M \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad u_{n_M+n} > M$

Demande de l'enseignante : « simplifier »

Quelle(s) trace(s) 6 mois plus tard ?

Questionnaire de type « Vrai/Faux. Justifier si faux. », mai 2017.

Copie n°1

n°1	Si lim $u_n = +\infty$ alors $\forall A \in \mathbf{R}$ $\exists n_A \in \mathbf{N}$ tel que $u(n_A) > A$
Vrai / Faux	Si vous avez cochez "Faux", pouvez-vous justifier ci-dessous ?

Enoncez ici l'implication réciproque de l'implication n°1

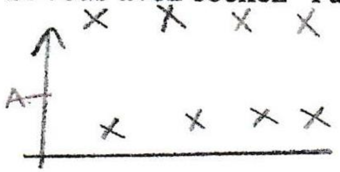
Pour rappel n°1 **Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\forall A \in \mathbf{R}$ $\exists n_A \in \mathbf{N}$ tel que $u(n_A) > A$**

Réciproque : Si $\forall A \in \mathbb{R}$ $\exists n_A \in \mathbb{N}$ tel que $u(n_A) > A$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Pour la réciproque

Vrai / Faux

Si vous avez cochez "Faux", pouvez-vous justifier ci-dessous ?



Ici, $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_A \in \mathbb{N}$ tel que $u(n_A) > A$, mais la suite oscille et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) \neq +\infty$

Enoncez ici l'implication réciproque de l'implication n°5

Pour rappel n°5

Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\forall A \in \mathbf{R}$ $\exists n_A \in \mathbf{N}$ tel que pour entier *n* supérieur à n_A $u(n) > A$

Réciproque : Si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_A \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_A$ $(n \in \mathbb{N})$, $u(n) > A$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$

Pour la réciproque

Vrai / Faux

Si vous avez cochez "Faux", pouvez-vous justifier ci-dessous ?

C' est la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$.

Quelle(s) trace(s) 6 mois plus tard ?

Questionnaire de type « Vrai/Faux. Justifier si faux. », mai 2017.

Copie n°2 et 3 : élèves de type « correcteur »

n°1 Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\forall A \in \mathbf{R}$ $\exists n_A \in \mathbf{N}$ tel que $u(n_A) > A$

Vrai / Faux	Si vous avez coché “Faux”, pouvez-vous justifier ci-dessous ? Il manque l'information « tel que pour tout entier $n > n_A$ »

n°4 Si $\lim u_n = +\infty$ alors $\exists A \in \mathbf{R}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $u(n) > A$

Vrai / Faux Entourer votre choix	Si vous avez cochez “Faux”, pouvez-vous justifier ci-dessous ? Il n'existe pas qu'un seul A, sinon cela ne prouve pas que la limite est $+\infty$ et cela ne fonctionne pas pour tout $n \in N$.

Merci pour votre attention

Discutons …

Par exemple, si l'on suppose que la variable x converge vers zéro, on aura

$$\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right) = \mathrm{M}((-1, +1)),$$

attendu que l'expression $\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)$ admettra une infinité de valeurs comprises entre les valeurs extrêmes -1 et $+1$.

A.-L. Cauchy, *Analyse algébrique*, 1821. p.30

Pour prolonger :

Chorlay, R. (2019). *A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition*. IJRUME (International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education) 5(3), 267-314.