LABORATOIRE DE DIDACTIQUE
ANDRÉ REVUZ

Analyse de pratiques
Théorie de l'Activité
Proximités et tensions
ou comment apprécier le rapprochement des activités mathématiques des élèves avec les connaissances visées

Fabrice VANDEBROUCK, LDAR, Université de Paris et ses cotutelles

Le plan

1) Une assise théorique en Théorie de l'Activité pour l'analyse des pratiques des enseignants et des activités mathématiques des élèves

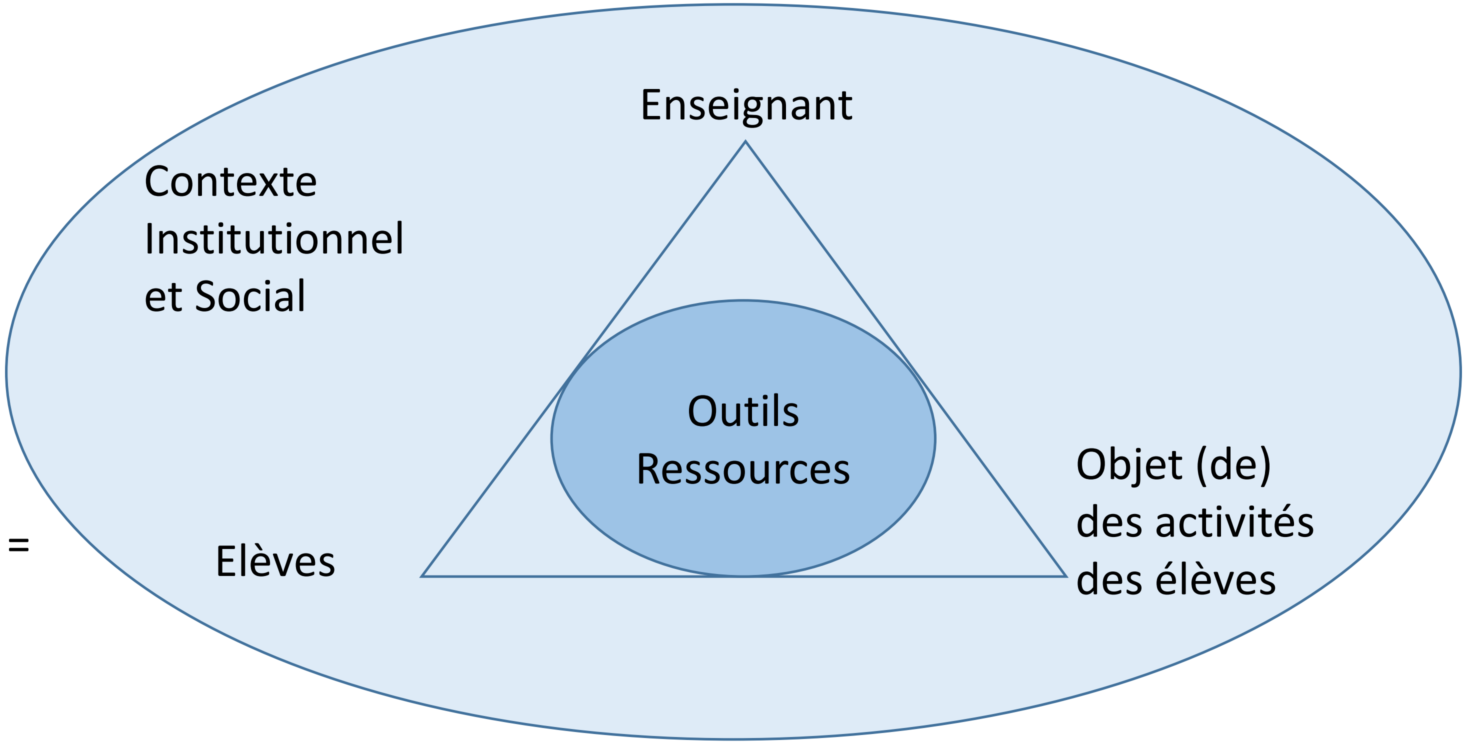
2) Des exemples d'analyses centrés sur **les proximités et les tensions, de nouveaux outils en lien avec les déroulements**

3) Et alors ? La transposition en formation des enseignants

Théorie de l’Activité en Didactique des Mathématiques (TADM)

- Le point de départ est **la situation de classe (ordinaire)** étudiée avec un certain filtre

Activité = système complexe imbriquant l’activité des élèves et l’activité de l’enseignant = la situation pour nous



- Une analyse de la situation (A) guidée par plusieurs dimensions…
  - Cognitive (qui embarque les mathématiques en jeu, les **tâches, la conceptualisation visée**….)
  - Médiative (qui embarque toutes les interactions avec le professeur, les outils, les ressources : l’importance des **déroulements,** notamment **proximités / tensions**…)
  - Institutionnelle et Sociale (**déterminants externes**)
  - Personnelle (**déterminants internes**, les élèves et l’enseignant)

  Certains reconnaissent sans doute les composantes de la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes mais d’un autre point de vue

  Maha Abboud introduit de son côté les axes Cognitifs, Pragmatiques et Temporel ce qui est un découpage un peu différent mais de même nature

- … et plusieurs niveaux d’analyse
  - Global : le **relief** sur les mathématiques en jeu et leur enseignement, l’inscription de la séance dans le scénario, la **conceptualisation** visée
  - Local : les **tâches** prescrites, les **aides**, les **tensions** et les **proximités**
  - Micro : les automatismes, routines
- On apprécie les **activités mathématiques *possibles* des élèves** (a minima, a maxima, pour tous), intermédiaires entre l’enseignement et l’apprentissage des connaissances en jeu (nouvelles, réorganisation de connaissances anciennes…)
  - Sous-activités de **reconnaissance**, **organisation**, **traitement**, activités de contrôle…
- On remonte aux **pratiques enseignantes** en identifiant des régularités et disparités au-delà des situations de classes singulières, en rajoutant l’approche ergonomique

2) Exemples précis de mise en œuvre

- Deux situations d'introduction de la notion de variation des fonctions en classe de seconde (première formalisation de la définition de fonction croissante) – activité d'introduction + premier cours.
- Deux situations en géométrie élémentaire en classe de sixième, avec des tablettes numériques (passage de G0 à G1, conceptualisation du cercle) – *pas le temps !!*

Deux exemples d'introduction de la notion de variation des fonctions en seconde

Dans les **deux** cas

- Une situation d'introduction proposée aux élèves (tâche prescrite / but pour les élèves : résoudre les différentes sous-tâches)

- Une reprise par le professeur en classe (cours dialogué / but : interagir avec le professeur, s'approprier la connaissance nouvelle en jeu)

On suppose que les élèves jouent le jeu (du côté du « motif »), on n'a pas eu accès à des questionnaires élèves, professeurs…

Éléments de relief : les enjeux de l'enseignement sur la notion de variation des fonctions en classe de seconde

- L'aspect FUG(*) de la **définition formelle**, les aspects outils et objets, les différents registres pour les fonctions…
- Les programmes de seconde (2009, 2019)
  - du collège au lycée : consolider et étendre une familiarisation de la notion de variation des courbes aux fonctions
  - Introduction d'une **définition formalisée (algébrique)** peu utilisée comme outil en seconde, l'utilisation ultérieure de la dérivée à partir de la classe de première va minorer encore cet aspect…
  - Travail antérieur sur intervalles et relation d'ordre nécessaire, notion de maximum en lien étroit
- Les difficultés des élèves : des changements de registres non « transparents »
  - Des tables et courbes aux graphes de fonctions, assez accessible
  - Passage à l'algébrique fonctionnel, plus délicat

* Formalisateur, Unificateur, Généralisateur

Les deux tâches d'introduction

- Les surfaces agricoles

NOM : **Classe :**

Prénom : **Date : ……. / ……. / …….**

Surfaces agricoles

Le long d'une rivière dont les bords sont rectilignes, il a été décidé de délimiter des champs destinés à l'agriculture. Ces champs seront tous de forme rectangulaire, l'un des côtés du rectangle étant le bord de la rivière, ce qui permettra facilement l'arrosage des cultures.

Pour délimiter son champ, chaque famille d'agriculteurs reçoit une clôture de longueur égale à 750 mètres, ainsi que tout le matériel pour installer solidement la clôture. Chaque famille peut donc choisir les dimensions de son champ, pourvu qu'il respecte les contraintes indiquées et soit entouré par les 750 mètres de clôture.

Les champs ainsi délimités auront-ils tous la même surface ?

Si la réponse à la question précédente est négative, existe-t-il une façon d'installer la clôture qui délimite un champ de surface maximale ?

- Le ballon sonde

ACTIVITÉS

Objectif
Lire des variations, des valeurs extrêmes.

1 Le lancer d'un ballon sonde

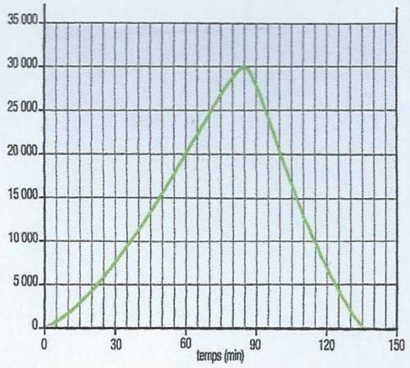
On lance un ballon sonde.
Arrivé à une certaine altitude, il éclate puis chute.
L'altitude en mètres et la température en °C sont enregistrées au cours du vol et représentées ci-contre.

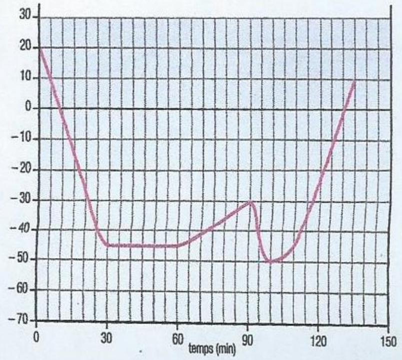
1. Identifier chaque courbe.

2. a. Décrire les variations de l'altitude au cours du temps.
b. Quelle est l'altitude maximale atteinte par le ballon avant d'éclater ? Au bout de combien de temps a-t-il éclaté ?

3. a. Sur quelles plages horaires la température est-elle croissante ? décroissante ? constante ?
Écrire ces plages horaires sous forme d'intervalles.
b. Quelles sont les températures maximale et minimale rencontrées ?

4. Sur quelle plage horaire la température est-elle négative ?



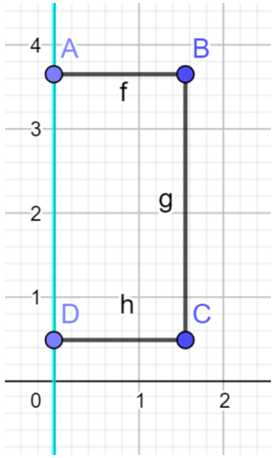


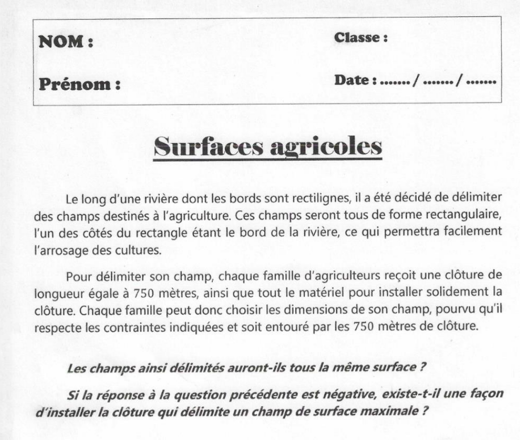
- Après le premier temps de modélisation en demi-groupes (**obtention par tous les élèves de la fonction** x → x(750 – 2x), x longueur du côté perpendiculaire à la rivière), **on propose aux élèves de décrire les variations perçues**

a) **numériquement** sur un tableur

b) puis **graphiquement** grâce à une courbe tracée avec GéoGebra.

- Cela permet de questionner les élèves sur les variations de la fonction étudiée (modélisant la grandeur « aire ») quand la longueur d'un des côtés varie.
- Ils peuvent répondre, en affinant leurs formulations, en s'aidant du tableau de valeurs puis du graphique mais les réponses restent nécessairement approchées. Cette reconnaissance de l'approximation, explicitée, joue comme un prétexte pour faire réfléchir les élèves à une formulation algébrique « exacte ».
- L'autre prétexte avancé est de s'affranchir de la courbe ou des valeurs numériques pour une étude « intrinsèque » algébrique
- Le tout dure 50 minutes




NOM : **Classe :**

Prénom : **Date : ..../ ..../ ....**

Surfaces agricoles

Le long d'une rivière dont les bords sont rectilignes, il a été décidé de délimiter des champs destinés à l'agriculture. Ces champs seront tous de forme rectangulaire, l'un des côtés du rectangle étant le bord de la rivière, ce qui permettra facilement l'arrosage des cultures.

Pour délimiter son champ, chaque famille d'agriculteurs reçoit une clôture de longueur égale à 750 mètres, ainsi que tout le matériel pour installer solidement la clôture. Chaque famille peut donc choisir les dimensions de son champ, pourvu qu'il respecte les contraintes indiquées et soit entouré par les 750 mètres de clôture.

Les champs ainsi délimités auront-ils tous la même surface ?

Si la réponse à la question précédente est négative, existe-t-il une façon d'installer la clôture qui délimite un champ de surface maximale ?

Retour au relief : le changement de registres vers l'algébrique : enchevêtrement de points de vue dynamique / statique + global / ponctuel + du formalisme + notion d'intervalle et relation d'ordre

- Numérique : perceptif, **dynamique et ponctuel**, « ça augmente » ; « ça diminue » ; deux grandeurs distinguées mais symétriques
- Graphique : perceptif, **global en dimension 2**, « ça monte » ; « ça descend » ; les grandeurs sont implicites ; *x* et *y* ne sont pas distingués

→**Dynamique et ponctuel** : « quand *x* augmente, *y* augmente » (introduction de *x* et de *y* ; toujours en 2 dimensions mais la dissymétrie apparaît)

→ **Dynamique, ponctuel et dimension 1** : « quand *x* augmente, *f*(*x*) augmente »

→ **Statique, ponctuel, ordonné, formalisé** : « si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ » (nouveau formalisme)

→ Réintroduction du **global** : « pour tout x_1, x_2 sur I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ » (quantification, intervalle)

→ Vocabulaire « *f* est croissante » (et non croissant n'est pas décroissant)

- Le cours dialogué (bilan, reprise), 50 minutes également
- Trois phases
  - Généralisation à partir des activités tableur
  - Idem à partir des activités graphiques sur GéoGébra
  - Vers la définition finale formalisée
- Deux types d'épisodes dans chacune des trois phases
  - soit on généralise un constat, une relation, une interprétation, à partir d'une activité ou d'une connaissance des élèves (**on identifie des proximités cognitives discursives ascendantes, souvent à partir de réponses à une question**) ;
  - soit on reformule ou on applique une connaissance nouvelles pour la réinscrire dans les activités ou les connaissances des élèves (**avec des proximités cognitives discursives horizontales ou descendantes**)…
  - Beaucoup de proximités, diverses, pas toujours bien catégorisables, pas toujours cognitives…

1ère phase du bilan : reprise de l'activité tableur

- Bleu : discours d'un ou des élèves
- Rouge : appui (proximités horizontales, ascendantes, descendantes)
- Vert : nouveau (proximités ascendantes ou pas ?)

I **(15)** Donc ça nous c'est ce qu'on propose à l'ordinateur, au tableur et il nous calcule les surfaces. *[on voit les deux colonnes du tableur* ***avec x et f(x)]***
(…)
Alors vous allez regarder. ce qui se passe ? Dans la colonne de droite évidemment, silence (7'')
alors regardez bien parce que… E Stop
Quoi stop ?
Alors on peut peut-être s'arrêter là alors qu'est-ce que vous avez remarqué ?
E… le maximum…
Alors il se trouve que dans la première partie du tableau qu'est-ce qu'on a constaté ?
E. … Donc j'espère que vous avez noté des choses. E. Ben oui
Alors vous avez noté que dans la première partie du tableau on constate que la surface augmente (son doigt suit la colonne en descendant) E. puis diminue
jusqu'à, alors, une valeur qui pour l'instant est maximale E. en nombre entier
en nombre entier. En tout cas 190 on a 70300 et après on constate que, pour l'instant, on va aller au bout. E….
Ça diminue. Alors est-ce que ça continue à diminuer tout le temps
E. ouais

Et là on est à 0. Alors qu’est-ce qu’on pourrait dire globalement, c’est-à-dire qu’est-ce qu’on a observé ?
Alors pas tout le monde à la fois vous levez la main…
(17) Chut vous écoutez, vous vous écoutez… E.
Alors dans la colonne de gauche est-ce que les valeurs augmentent tout le temps ?
E. Oui
Dans la colonne de gauche les valeurs augmentent de 10 en 10 régulièrement de 0 à 375
Dans la colonne de gauche **x** augmente tout le temps **(proximité ascendante en appui sur le x dans le tableur)** et du coup tandis que x augmente
E….
Donc dans la colonne de droite . E. ça augmente
ça augmente E. et après ça diminue.
et après ça diminue. Donc on a d’abord des valeurs qui sont en augmentation et puis après, alors ici c’est à 190 que ça a l’air de changer, et après c’est en diminution,
E. à partir de 200
voilà à partir de 200 et jusqu’à la fin. J’ai mis 375 parce que ça tombe sur 375 où ça fait 0, bon.
Donc **(18)** qu’est-ce qu’on peut déjà dire. Qu’est-ce que ça peut nous permettre de dire cette observation.

Et déjà c'est pas toutes les mêmes valeurs ça on l'a vu, il y en a plein plein de différentes Et puis de façon plus globale,

E. plus **x** est **grand**

plus x est grand *[sorte de mauvais appui, « grand » n'est pas « augmente »]*

E. plus la surface est petite. E. non

Alors c'est pas ça. Alors corrigez, J, corrigez

Chut, non vous vous écoutez sinon, comme c'est un peu compliqué il faut vraiment faire un effort

E. Ben ça **augmente** mais au bout d'un moment ça rediminue

Dans un premier, pour certaines valeurs de x ça augmente

E. Et après ça diminue

Et après ça diminue. Alors est-ce que c'est clair pour tout le monde ça ?

Alors qu'est-ce qu'on pourrait faire comme phrase ? Essayez de faire une phrase, oui une phrase, A.

Alors c'est quelle première partie ? Y a une première partie où la surface augmente J.

ben sur x à un certain moment **(19)**

Alors sur x. Précisez sur x justement *[avec un geste de gauche à droite]*

J. sur x ça augmente, jusqu’à un nombre et après ça diminue

Alors on va essayer alors Jusqu’à 190 pour x. Donc qu’est-ce qu’on pourrait dire pour x ?

E. ca augmente jusqu’à 190 et à partir de 200 ça diminue

D’accord donc on part de 0 jusqu’à 190. Quand on prend x entre 0 à 190 on constate que la surface semble augmenter et quand on se met entre 200 et 370 la surface

E. Diminue

Diminue. D’accord donc 0 190 c’est un premier **intervalle** *[il montre le tableau déjà écrit à gauche]* (…) **(proximité ascendante)**

On constate que sur l’intervalle 0 190, quand on prend x entre 0 et 190, on constate on a une surface qui est en augmentation et puis sur l’intervalle 200 370 **(20)** on a des surfaces qui sont en diminution. Vous voyez ça ?

L’enseignant provoque du « fait » ou du « dit » (traces des activités) il pose des questions sur ce qui a été fait ou dit… 7 fois ! (le constat sur le tableur, les valeurs augmentent puis diminuent, passage à x, aux intervalles, formulation…) – autant de proximités horizontales et **ascendantes** !

- Établissement de la co-variation numérique (facilitée par les deux colonnes du tableur, qui amènent une perception **dynamique ponctuelle** de la co-variation)
- On a relié l’observation sur la première colonne à « *x* augmente » et la deuxième colonne à « la surface augmente sur un intervalle puis diminue sur un autre intervalle », co-variation (*x*, *surface*) **toujours dynamique ponctuel mais avec *x***
- On est encore « à mi-chemin » de la covariation (x,$f(x)$) et très loin de la formalisation qui nécessite un point de vue **statique**

et aussi introduction d’un doute (en est-on certain ?)…

Bon. Est-ce que ça veut dire que le maximum on l'a de façon certaine ici

E. Ce n'est pas précis

Ca n'est pas précis Pourquoi ? E.

Voilà. On a un écart de 10. Est-ce qu'on pourrait avoir, est-ce qu'on pourrait arriver à l'avoir exactement ? J. parlez pour tout le monde en levant la main

E. On fait un écart de 1

Un écart de 1. Chut, Ca suffira ? E

En commençant éventuellement à 190 effectivement, en restreignant la zone, M.

E. On résout une inéquation

Ah On résout une inéquation

Donc est-ce que c'est le tableur qui va nous la faire E. Non

Voilà Donc là qu'est-ce que vous pointez comme, comme heu, comment dire comme différences enfin comme options là ?

Avec le tableur est-ce qu'on peut avoir un résultat exact ?

E. Non, Approximation

On va avoir une approximation alors de plus en plus précise Julien a raison parce que plus le pas va être petit (**21**) plus on va peut-être arriver à donner une valeur précise. Mais Melissa elle voulait résoudre une inéquation donc revenir à de l'algébrique pur. C'est ça (il montre le tableau). Voilà. Alors effectivement, on avait vu ça que avec l'algèbre on peut peut-être essayer d'obtenir un résultat précis **(proximité descendante)**.

2ème phase du bilan : reprise de l'activité GéoGébra

- Bleu : discours d'un ou des élèves
- Rouge : appui (proximités)
- Vert : nouveau (proximités ascendantes ou pas ?)

(…) *[**même travail fait avec le graphique affiché (tracé sur GeoGebra) : la courbe monte puis descend**]*

(…)

À votre avis qu’est-ce qu’on peut choisir comme mot pour dire que la courbe monte ou que la fonction prend des *[gestes vers le haut]* valeurs qui augmentent. Alors on a été cherché un **synonyme d’augmenter**

Un élève E : ascendant ; un autre E : croissant

Croissant **(proximité ascendante)**

(…), donc là vous pouvez noter qu’on est encore dans l’exploitation de l’exemple des surfaces agricoles **(proximité descendante)** (…)

(…)

E : Ah ben intervalle 0, 187,5

Voilà si on fait confiance à GéoGébra pour l’instant on n’a pas… *[il écrit et dit]* on va dire que sur l’intervalle [0, 187,5] la fonction *f* est, alors on va mettre en rouge, donc le mot hein **le mot qu’on a choisi**, on aurait pu en prendre d’autres, c’est croissante *[écrit en rouge]* **(proximité ascendante)**. Bon alors après (…)

Après la phase 2…

- Jeu de proximités horizontales, ascendantes mais aussi descendantes (en appui sur les élèves)
- Point de vue toujours plutôt **dynamique** mais toujours rien de **statique** qui prépare la définition formalisée
- Jeu **ponctuel-global** (les valeurs du tableur augmentent versus la courbe sur GéoGébra monte sur un intervalle)
- **Covariation x – grandeur** (« quel est l’intervalle de x pour lequel les valeurs augmentent ou pour lequel la courbe monte ? »)
- Accent sur le vocabulaire (« on dira que *f* est croissante »)
- Méta (« on décrit les phénomènes par des mots », « c’est ça qu’il faut retenir », « le mot précis »)

3ème phase du bilan : vers la définition ponctuelle et statique quantifiée

- Bleu : discours d'un ou des élèves
- Rouge : appui (proximités)
- Vert : nouveau (proximités ascendantes ou pas ?)

(**34**) Alors maintenant on n'a pas répondu à sa question : comment ça se traduit ça. Ca se visualise en courbe qui monte ou qui descend [GLOBAL] ou bien en tableau où des valeurs augmentent ou des valeurs diminuent [PONCTUEL DYNAMIQUE] (**proximités horizontales**).
Maintenant il faudrait qu'on soit capable de dire ça en termes algébriques…
(…) [il montre le mot « croissant » sur le tableau]
E. … <

Mais cette phrase-là **vous êtes d'accord qu'elle est pas très opérationnelle en termes de calcul**. C'est du constat, c'est une observation. On utilise le signe comme ça (<) c'est ça ? **(proximité ascendante) (36)**

(…)

(**39)** Dans une fonction, il y a x et il y a y, il y a x et il y a f(x). Oui alors, mais là j'essaie de voir quelque chose qui serait général, c'est-à-dire sur cet exemple de donner une définition de fonction croissante qui soit une définition générale.

E… sur l'intervalle 0, 187,5 plus x augmente plus y augmente aussi

Alors plus x augmente plus y augmente. Est-ce que ça ça vous parait une bonne description ? Voilà. Alors ça c'est nouveau plus x augmente plus y augmente. Ca est-ce qu'on peut mettre ça en algèbre ? C'est-à-dire écrire ça avec des symboles. Peut-être ce symbole là *[il montre <]* il peut être utile

[…] **(41)** Ca *x* augmente, ça veut dire quoi ? **Ca veut dire que *x* est de plus en plus grand ? *[ponctuel dynamique]*… Ça veut dire que quand *x* est de plus en plus grand, en même temps *f*(*x*) aussi *[covariation (x,f(x))]*.** Alors le problème c'est que c'est ça qui est compliqué. Cet x augmente de plus en plus. Comment est-ce qu'on peut traduire ça avec ce symbole là *[montre <]* ? Pour dire que *x* est de plus en plus grand ? Ce symbole là il dit bien plus grand que. Donc entre de plus en plus grand et plus grand que on a l'impression que c'est quand même connecté. Oui (42) ?

(…)

(45) Qu'est-ce que ça veut dire x augmente ? Ça veut dire quand je prends **des valeurs de x de plus en plus grandes *[ponctuel et dynamique]***, des valeurs de *x* de plus en plus grandes. Là il y a combien de valeurs de x au tableau ? E.

Ben là on a écrit un x – si je dis je prends des valeurs de x de plus en plus grandes, il faut que j'en prenne au moins ***[montre deux doigts] [vers le statique ponctuel]***
E. deux
Deux, **sachant qu'il y en a une qui sera plus petite que l'autre *[statique ponctuel ordonnée]*.**
Alors deux valeurs de *x* sachant qu'il y en a une qui est plus petite que l'autre comment ça va s'écrire ? Déjà deux valeurs de *x*, comment on les écrit deux valeurs de *x* : si j'ai deux valeurs de *x* différentes, si j'écris ça *x x* est-ce que c'est deux valeurs de *x* différentes ?

(…)
(…) [proximité descendante]
E.
(…)
Est-ce que ce que j’ai fait là, évidemment c’est des exemples**, est-ce que c’est valable quels que soient *[quantification]* les nombres x1 x2 que je prends dans l’intervalle** à condition que x1 soit plus petit que x2 ? **(50)** Est-ce que si je prends n’importe quel x1 plus petit que n’importe quel x2 dans cet intervalle, j’aurais à chaque fois f(x1) plus petit que f(x2) E. oui, ben oui, ben oui
Donc ça pourrait être une bonne façon de traduire que la courbe monte par exemple et **c’est généralisable à n’importe quelle fonction *[méta sur l’aspect G]*. Autrement dit une fonction est croissante sur un intervalle si quelque que soient les réels x1 x2 qu’on prend dans l’intervalle, à partir du moment où x1 est plus petit que x2, f(x1) est plus petit que f(x2)**

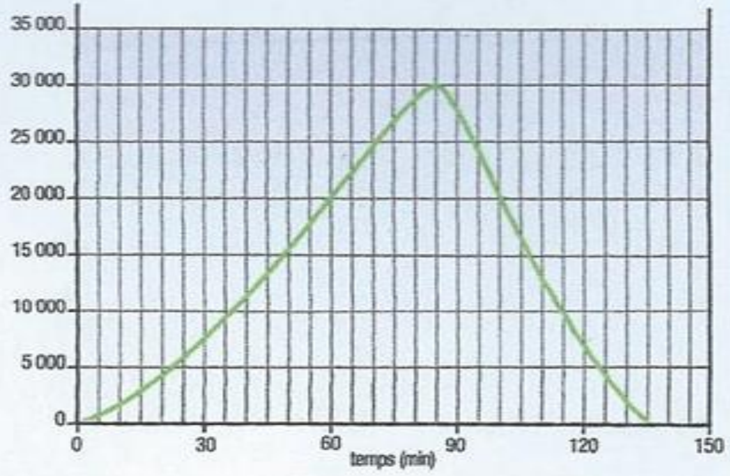
- L'enseignant questionne beaucoup les élèves, soit sur l'activité développée, soit sur des prolongements de cette activité qu'il **provoque**
- Pour arriver à la première et deuxième étape, traduction numérique ou graphique, il s'appuie sur ce que les élèves constatent sur un tableur et sur un graphique (« on constate que la surface augmente puis diminue »). **Proximités ascendantes**… Mais il reste en lien avec l'exemple (surface)
- Pour la troisième étape, traduction algébrique, il motive – cf. approximation, ou possibilité d'absence de courbe ou de table de valeurs…
- Il tente de faire sortir la traduction, **en vain**. Des **proximités horizontales et des « apports directs » liées à la difficulté du propos**…
- Les élèves n'arrivent pas jusqu'au bout… malgré efforts ! Mais dès que la piste de comparer deux valeur de x est donnée, les élèves reprennent
- C'est également l'enseignant qui conclut en ajoutant « pour tout couple » et l'aspect Généralisateur…
- **Proximité descendante** avec la courbe pour finir !

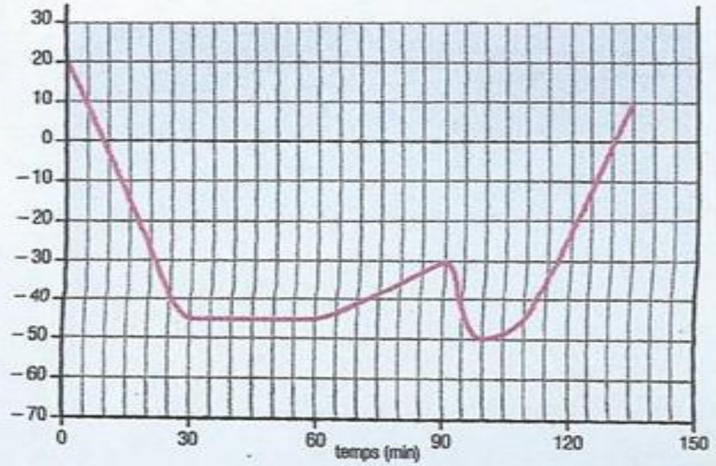
ACTIVITÉS

Objectif
Lire des variations, des valeurs extrêmes.

1 Le lancer d'un ballon sonde

On lance un ballon sonde.
Arrivé à une certaine altitude, il éclate puis chute.
L'altitude en mètres et la température en °C sont enregistrées au cours du vol et représentées ci-contre.





1. Identifier chaque courbe.

2. a. Décrire les variations de l'altitude au cours du temps.
b. Quelle est l'altitude maximale atteinte par le ballon avant d'éclater ? Au bout de combien de temps a-t-il éclaté ?

3. a. Sur quelles plages horaires la température est-elle croissante ? décroissante ? constante ?
Écrire ces plages horaires sous forme d'intervalles.
b. Quelles sont les températures maximale et minimale rencontrées ?

4. Sur quelle plage horaire la température est-elle négative ?

- Une **tension possible :** l’énoncé porte sur du graphique mais ne parle pas explicitement de fonctions (« l’altitude *au cours* du temps ») : **peut-être pas de reconnaissance de fonctions en jeu chez des élèves (activité de reconnaissance des fonctions au mieux uniquement *a maxima*)**
  - Travail graphique, met en évidence la dépendance, mais de quoi ?, (« l’altitude **au cours du vol, au cours du temps** », « sur quelle **plage horaire** la température… » « **au bout de** combien de temps ? » - pas de flèches sur les axes. On peut rester sur des **courbes contextualisées et pas sur des fonctions**
  - La variable t n’est pas citée en tant que variable. Pas d’orientation sur les axes. Ce qui varie ce sont uniquement des grandeurs.
  - On reste sur des activités mathématiques globales (pour ce qui concerne les variations)
  - Rien de ponctuel, statique et algébrique n’est préparé, **pas de proximités naturelles avec la définition formalisée de croissante (ni même les formulations intermédiaires)**
  - **IMPORTANCE DU DISCOURS DU PROFESSEUR**

- Bleu : élèves
- Rouge : appui et proximités
- Vert : nouveau (proximités ascendantes ?)

Juste un rappel avant qu'on parle des généralités. Rappel sur ce qu'on a vu la semaine dernière. On a étudié le cas du ballon sonde pour lequel on s'intéressait à deux quantités l'altitude et la température.

Donc on avait étudié deux fonctions du point de vue graphique. *[**appui sur l'activité a maxima ; est ce que le rapprochement avec les fonctions a été repris a minima par le discours du professeur ?]***

Donc une fonction qui représentait l'altitude et une fonction qui représentait la température. *[**Pas de référence à la variable indépendante, temps, cela ne peut pas provoquer des activités élèves sur la covariation**]*

Donc ce qu'on voulait décrire qualitativement, l'évolution de ces deux phénomènes. On avait introduit les notions de fonction croissante et de fonction décroissante. Donc c'est ce qu'on va généraliser aujourd'hui. *[**On ne sait pas si ce qui a été introduit a trait uniquement aux quantités croissantes ou décroissantes, explicitement ou non « au cours du temps », ou vraiment aux fonctions – risque de saut…]*** […].

Alors ce que je vais faire aujourd'hui, je vous projette le contenu du cours identique à ce que vous avez dans les manuels donc il n'y a pas besoin de recopier sauf quelques exemples supplémentaires […]

Donc premier mot important, c'est la notion de fonction croissante. **(1)**

[…]

Donc premier cas de figure, j'étudie la fonction sur un intervalle, d'accord, donc un certain ensemble des valeurs de x, on va dire qu'elle est croissante, strictement croissante, si lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de f(x) c'est-à-dire des images augmentent également. Ça c'est ce qu'on appelle une fonction croissante ***[on va directement au ponctuel, dynamique, 1 dimension - Pas de rapport direct avec l'activité qui est globale graphique ! Pas de proximité ascendante sauf si le prof l'avait bien préparé pendant la situation d'introduction]***

Graphiquement ça se traduit par quoi. Ça se traduit par le fait que la courbe est en train de monter [*gestes du bras qui monte*] Comme notre ballon sonde de la dernière fois, au début l'altitude augmente d'accord. Simplement au niveau du vocabulaire mathématique, on ne va pas dire la fonction augmente, on dira qu'elle est strictement croissante. OK. [***Tentative de proximité descendante mais sans aller jusqu'au bout de la mise en relation entre la caractérisation ponctuelle dynamique donnée ET le fait que « le ballon monte » (ou « l'altitude augmente ») qui est global graphique dans la tête des élèves. Une référence à la variable de temps serait nécessaire dans le discours pour faire ce lien***].

(…)

Donc premier cas de figure, je répète, fonction strictement croissante ça veut dire quand x augmente les valeurs des images augmentent, ça signifie aussi, je l'écris là au tableau, si a plus petit que b, vous prenez deux nombres dans un certain ordre, alors f(a) est plus petit que f(b)
(*si $a<b$ alors $f(a)<f(b)$*)
[Pas de proximité non plus entre la caractérisation ponctuelle dynamique et la nouvelle caractérisation formalisée ponctuelle et statique, pas du tout préparé par l'activité sur le ballon sonde, pas préparé dans le discours « plus x augmente… », pas de graphique pour faire une proximité descendante *(Manque la quantification, seul le manuel donne la définition complète avec un graphique)]*

Ça veut dire que l'ordre des images est le même que l'ordre des antécédents [*il va plus loin que la définition en la faisant marcher si a < b et si a > b*]

Elève : ça on l'aura au contrôle ?

P : oui

[(et ça s'arrête là) proximité descendante peut-être manquée, l'enseignant pourrait rebondir sur l'intérêt de la caractérisation algébrique formelle dans un cas particulier comme le ballon sonde… on peut dire que l'aspect FUG de la définition formelle n'est pas motivé, ni même identifié pour les élèves. Il n'y a pas eu de prise de conscience de quelque chose qui manque, ni, de ce fait, d'attente de le compléter].

Ok on dit aussi que la fonction conserve l'ordre quand l'ordre des antécédents est le même que celui des images.

L'enseignant choisit une **situation d'introduction difficile à exploiter** pour introduire la dernière partie de ce qui est en jeu. *Mais on n'a pas eu accès à cette séance*.

Dans l'activité ce qui est en jeu c'est l'interprétation du fait qu'une certaine courbe monte (global), avec une prise en compte seulement des images de la fonction représentée – le temps, en abscisse n'étant jamais mentionné (première variable « transparente »). Du coup la traduction algébrique n'a pas été préparée par l'activité introductrice (elle permettrait cependant de l'illustrer après coup). **Tension cognitive qui reste (entre activité possible des élèves qui reste globale, graphique et la nouvelle connaissance visée) et très difficile à combler via des proximités cognitives**

Autrement dit, dans le cours, le lien entre l'activité qui a été développée par les élèves – même a maxima - et la définition visée **n'est pas beaucoup fait**, sans que soit signalé non plus ce qu'on gagne avec la traduction algébrique formalisée de la co-variation des deux variables en jeu x et f(x), ie l'aspect FUG.

3) Et alors ? La transposition en formation des enseignants

Que retenir ?

- Les recherches peuvent **éclairer** les formateurs et les enseignants à partir de leur expérience, en dégageant des régularités qui du coup prennent sens (« des mots pour le dire », vigilence…).
- Elles peuvent aussi donner certains **outils d'analyse** à utiliser soit pour préparer et choisir les contenus (relief, tâches) soit au moment des déroulements (nature du travail à mettre en place, aides, proximités, tensions…).
- On peut espérer **élargir la palette des pratiques possibles (alternatives)**, notamment sur les contenus à proposer aux élèves (en termes de tâches notamment) et contribuer à ajuster les accompagnements des élèves en classe au plus près des acquisitions visées (selon les contextes, les formes de travail, les contenus en jeu, etc.)

Une sensibilisation à des outils

- Le **relief** : triple analyse croisée mathématique (épistémologique), curiculaire (les programmes) et cognitive (les difficultés des élèves, la conceptualisation…) sur les mathématiques en jeu et leur enseignement
  - Les notions FUG, les dialectiques dynamique/statique ; ponctuel/global…
- Les outils d'analyses des **tâches** (Robert, 1998) - *cognitif*
  - Les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable, disponible)
  - Les adaptations de connaissances (« mesure » de la complexité des tâches prescrites)
- Les actions et interactions - *médiatif*
  - **Aides** procédurales : tournées vers l'objet de l'activité des élèves (la tâche)
  - **Aides** à visée constructive : tournées vers les élèves eux-mêmes
  - **Les proximités cognitives** (rapprochement « aux yeux du chercheur » ENTRE les activités mathématiques / connaissances anciennes des élèves ET les connaissances nouvelles en jeu)
    - Proximités discursives, proximités instrumentales
    - Proximités uniquement « pragmatiques » n'embarquant pas de cognitif.
  - Les **« tensions »** (cognitives, pragmatiques, voire temporelles…)
- Les **sous-activités** (reconnaissance, organisation, traitement interne)

Une connaissance de notre méthodologie

- Analyse GLOBALE du **relief** (la triple analyse) et des **scénarios**
- Analyse LOCALE des **tâches prescrites** (ou du but à atteindre par les élèves)
- Recueil de **questionnaires** le cas échéant (*personnel, institutionnel, social)*
- Découpage du **déroulement** en phases et épisodes (définis souvent par une sous-tâche prescrite ou un sous-but à atteindre par les élèves)
    - Analyse des actions et des interactions (transcriptions) – on étudie les aides, **on infère les tensions et les proximités**, notamment celles embarquant du cognitif
    - **On infère l'activité possible des élèves** (en particulier les activités mathématiques des élèves, a maxima, a minima, pour tous)
    - On tente de se prononcer sur les apprentissages possibles (**prudence**, complexité de l'**A**ctivité, articulation nécessaire micro / local / global – *temps long* - et aussi accès difficile à la dimension personnelle dans l'Activité, tous les élèves ne sont pas concernés de la même façon…)

Dans nos exemples…

1) Il y a **un choix d'énoncés introductifs** qui amènent à plus ou moins de « préparation » du nouveau (donc de possibilités d'appui – cf. relief) mais si on le fait à fond c'est LONG…
2) Il y a **une palette de possibles dans les appuis pour établir des proximités** : à partir des énoncés (tâches, *activités*) d'introduction qui provoquent – *ou non* - des activités élèves, mais aussi en provoquant des activités pendant le cours, par des exemples, des questions notamment…
3) Nonobstant, l'enseignant qui produit toutes les proximités possibles à partir de ce qui se passe dans sa classe **n'arrive pas à « faire sortir » la définition algébrique visée**, ce à quoi nous nous attendions. Le saut dynamique / statique puis retour au global est très difficile.
4) Le recours *ou non* au **méta mathématique** puisque la notion FUG est trop loin des connaissances et activités possibles des élèves (justification du besoin, discours sur la notion, sur ce qu'on gagne…)

En conclusion…

- L’objet de mon exposé n’était pas de la formation mais une analyse de pratique, très très fine, avec un zoom sur deux déroulements particuliers, justifié par un arrière plan théorique Vygotskien notamment.
- On a montré des différences importantes de pratiques, sans pouvoir conclure à des différences d’apprentissage – si ce n’est en termes d’hypothèses (**des « théorèmes d’existence locale »**), en lien avec le moteur d’apprentissages que peuvent représenter **des médiations dans la ZPD des élèves**.
- Cependant les enseignants font souvent des proximités spontanément, ils peuvent ne pas avoir le temps d’en faire d’autres, dans certains cas il est difficile de trouver des points d’appui chez les élèves… Peut-il en être autrement ? Peut-on enrichir les pratiques là-dessus ?
- Autant de questions qui montrent que ce que j’ai exposé est très local…

- Merci !!